ONEM ACEROS AREQUIPA

Nivel 3

PERÚ Ministerio de Educación

Ponte Pucheche y pongamos todos Perú

ACEROS AREQUIPA

Empresarios por la Educación

Olimpiada Nacional
Escolar de Matemática
ACEROS AREQUIPA

XXI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA - ACEROS AREQUIPA

ONEM-AA 2025

Etapa DRE - Nivel 3

11 de setiembre de 2025

Problema 1

En una feria municipal, José quiere comprar un libro que cuesta 98 soles. Él tiene un cupón de 50 soles, tres cupones de 20 soles, cuatro cupones de 5 soles y un cupón de 1 sol. Si el valor de los cupones excede el valor del libro, la diferencia no le será devuelta en dinero. Encuentra la menor cantidad de soles que José perderá al comprarse el libro usando sus cupones.

Solución

Todos los cupones de Juan, excepto el último, valen una cantidad múltiplo de 5 soles. Luego la cantidad de soles que puede pagar Juan debe ser múltiplo de 5 o múltiplo de 5 más 1. Luego la menor cantidad de soles que debe pagar es 100 soles, que es posible pues $100 = 50 + 20 + 20 + 5 + 5$. Juan perderá como mínimo $100 - 98 = 2$ soles.

Respuesta: 2

Problema 2

Al multiplicar un número de cinco dígitos por 6 obtenemos otro número de cinco dígitos, como se muestra

$$\overline{RADAR} \times 6 = \overline{LUNES},$$

donde cada letra representa un dígito y, además, letras distintas corresponden a dígitos diferentes. Encuentra el valor de $R + A + L + N + S$, si sabemos que $D = 4$.

Solución

Si $\overline{RA} \geq 17$, entonces $\overline{RADAR} \times 6 \geq 17000 \cdot 6 = 112000$. Como esto no es posible pues el producto tiene 5 dígitos tenemos que $R = 1$ y $A \leq 6$, esto implica $S = 6$. Si $A \in \{0, 2, 4, 6\}$ entonces $E = A$, pero esto no es posible pues a letras distintas deben corresponder dígitos distintos. Además $A \neq 1$ pues $R = 1$. Nos quedan 2 casos:

- Si $A = 3$ nos queda $13431 \times 6 = 80586$, que no cumple pues $L = E = 8$.
- Si $A = 5$ nos queda $15451 \times 6 = 92706$, que cumple las condiciones del problema.

Nos piden $1 + 5 + 9 + 7 + 6 = 28$.

Respuesta: 28

Problema 3

Un conjunto $\mathcal{A}$ está formado por cinco enteros distintos. Al sumar cada pareja de números distintos en $\mathcal{A}$ obtenemos los siguientes resultados:

$$\{9, 13, 14, 17, 18, 22, 33, 34, 38, 42\}.$$

Encuentra el valor de la suma de la media y la mediana del conjunto $\mathcal{A}$.
Aclaración: La mediana de un conjunto de números con una cantidad impar de elementos es igual al elemento ubicado en el centro cuando son ordenados de menor a mayor.

Solución

Sean $a < b < c < d < e$ los elementos de A, entonces

$$4(a + b + c + d + e) = 9 + 13 + 14 + 17 + 18 + 22 + 33 + 34 + 38 + 42 = 240 \Rightarrow a + b + c + d + e = 60.$$

Luego la media del conjunto es igual a $\frac{60}{5} = 12$. Además $a + b = 9$ y $d + e = 42$, entonces la mediana es igual a $c = 60 - 9 - 42 = 9$. Nos piden $12 + 9 = 21$.

Respuesta: 21

Problema 4

En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AD y BE, cuyas longitudes son $AD = 60$ y $BE = 56$. Si el lado AB mide 65, determina el perímetro del triángulo ABC.

Solución

Por el teorema de Pitágoras en los triángulos ABD y ABE tenemos que $BD = 25$ y $AE = 33$. Por áreas tenemos que $AD \cdot BC = BE \cdot AC$, entonces $BC = 14k$ y $AC = 15k$. Por semejanza entre los triángulos ADC y BEC se cumple que

$$\frac{14k - 25}{15k} = \frac{15k - 33}{14k} \Rightarrow 14(14k - 25) = 15(15k - 33) \Rightarrow 29k = 245 \Rightarrow k = 5.$$

El perímetro de ABC es igual a $65 + 70 + 75 = 210$.

Respuesta: 210

Problema 5

Encuentra el menor número entero positivo de k para el cual la ecuación

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = kx(x-5) + 24$$

tiene exactamente cuatro soluciones reales distintas.

Solución

La ecuación dada es equivalente a

$$\begin{aligned}(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) &= kx(x-5) + 24 \\ x(x-5)(x^2 - 5x + 10) &= kx(x-5).\end{aligned}$$

Notemos que 0 y 5 siempre son soluciones de la ecuación, para que la ecuación tenga exactamente cuatro soluciones reales distintas, la ecuación cuadrática restante $x^2 - 5x + 10 = kx \Leftrightarrow x^2 - 5x + 10 - k = 0$. debe tener dos soluciones reales distintas y además distintas de 0 y 5. Para que tenga dos raíces reales distintas es necesario que

$$25 > 4(10 - k) \Rightarrow 4k > 15.$$

Como k es entero, entonces k es por lo menos 4. Si $k = 4$ las otras soluciones son 2 y 3, que son distintas de 0 y 5. Por lo tanto $k = 4$ es el menor valor entero que cumple.

Respuesta: 4

Problema 6

En un proceso de selección laboral para un puesto de revisor técnico, cada uno de los 60 postulantes rindió 5 exámenes. Para ser contratado, un postulante debía cumplir al menos una de las siguientes condiciones:

- Obtener el primer puesto en por lo menos uno de los exámenes.
- Estar entre los siete primeros puestos en por lo menos cuatro de los exámenes.

Se sabe que en ninguno de los exámenes hubo empates en las calificaciones. ¿Cuál es el máximo número de postulantes que pudieron ser contratados?

Solución

Veamos que es posible contratar a 12 personas.

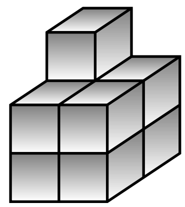
	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	F	F	F	G
3	G	G	G	H	H
4	H	H	I	I	I
5	I	J	J	J	J
6	K	K	K	K	L
7	L	L	L	M	N

En la tabla anterior, en la fila i y la columna j está ubicada la persona que ocupó el puesto i en el $j-$ésimo examen. Luego las 12 personas desde la A hasta la L fueron contratada. Supongamos que fue posible contratar a 13 personas, hay a lo más 5 de ellas que ocuparon el primer puesto, entonces por lo menos 8 de ellas que para ser contratadas tuvieron que quedar entre el segundo y séptimo puesto. Si asignamos una letra a cada una de estas personas, debemos ubicar $8 \cdot 4 = 32$ letras en las 30 casillas formadas por las últimas 6 filas de la tabla anterior, lo cual no es posible. Por lo tanto no es posible contratar a 13 personas.

Respuesta: 12

Problema 7

Juan tiene un bloque formado por 9 cubos apilados sobre una mesa, tal como se muestra en la figura:



Juan quiere guardar todos sus cubos retirándolos uno por uno. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo, considerando que no puede retirar un cubo antes de haber retirado todos los que están encima de él?

Solución

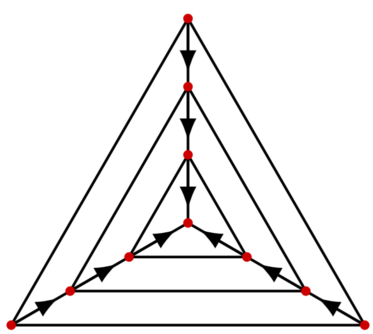
Asignemos los números 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 y 4 a cada uno de los cubos, de tal forma que si dos cubos están en la misma columna entonces tienen asignado el mismo número. Cada una de las formas de retirar los cubos se corresponde con un ordenamiento de estos números, la cantidad de ordenamientos es igual a

$$\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 7560.$$

Respuesta: 7 560

Problema 8

Una araña desea desplazarse desde el punto P hasta el centro de la telaraña.



P

En su recorrido puede pasar una o más veces por un mismo punto, pero no puede repetir ningún segmento. Además, si un segmento tiene una flecha, la araña debe seguir obligatoriamente la dirección indicada por dicha flecha. ¿Cuántos caminos distintos puede seguir la araña?

Solución

La telaraña tiene tres niveles y la araña debe pasar por cada uno de estos niveles sin retroceder. Para ir al segundo nivel puede ir directamente por el segmento con flecha o puede moverse por hasta 3 segmentos en sentido horario o antihorario antes de forzosamente tomar un camino una flecha, en total tiene 7 formas de llegar al siguiente nivel. Repetimos de forma independiente este conteo para llegar al segundo y tercer nivel, en total la araña tiene $7 \times 7 \times 7 = 343$ posibles recorridos.

Respuesta: 343

Problema 9

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tal que $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 4$ y $DA = 6$. Sea X un punto de la prolongación del segmento DB por B tal que $XD = 2XA = 2XC$. Sean Y y Z puntos de los segmentos XA y XC, respectivamente, tales que Y, B y Z son colineales. Sea p el menor valor que puede tomar el perímetro del triángulo XYZ. Si $p^2 = \frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos coprimos, determine el valor de $m + n$.

Solución

Notemos que los triángulos XAB y XDA son semejantes, pues comparten ángulo y tienen dos lados proporcionales, además el ángulo entre los lados proporcionales no es obtuso. Luego $\angle XAB = \angle XDA$ y esto implica que XA es tangente al circuncírculo de $ABCD$. De forma similar XC también es tangente.

Afirmación: YZ es tangente a la circunferencia en B. Esto pues el semiperímetro del triángulo es igual a la distancia desde X al punto de tangencia con la circunferencia ex-inscrita y por lo tanto para minimizar el perímetro debe ocurrir que dicha circunferencia sea la de menor radio posible, para que esto ocurra dicha circunferencia debe ser tangente en B y por lo tanto coincide con la circunferencia inicial.

Luego el perímetro de XYZ es igual a $2XA = XD = p$. Por ley de cosenos:

$$BD^2 = 3^2 + 6^2 - 2(3)(6)\cos A = 2^2 + 4^2 - 2(4)(6)\cos C.$$

Como $\cos C = -\cos A$, entonces $\cos A = \frac{25}{52}$ y reemplazando $BD = 6\sqrt{\frac{10}{13}}$. Por el teorema de la secante tenemos que

$$XA^2 = XB \cdot XD \Rightarrow \frac{p^2}{4} = \left(p - 6\sqrt{\frac{10}{13}}\right)p \Rightarrow p = \sqrt{\frac{640}{13}}.$$

Luego se cumple que $m = 640$ y $n = 13$. Nos piden $m + n = 653$.

Respuesta: 653

Problema 10

Sean a, b y c números reales positivos tales que

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=15.$$

Encuentra el menor valor posible de

$$(a^3+b^3+c^3)\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right).$$

Solución

Consideremos las siguientes variables

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \\ y &= \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \\ z &= \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} \\ t &= \frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}. \end{aligned}$$

Elevando x y y al cubo nos queda

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}+3(z+t)+6 \\ y^3 &= \frac{b^3}{a^3}+\frac{c^3}{b^3}+\frac{a^3}{c^3}+3(z+t)+6. \end{aligned}$$

También se cumple que $z+t=xy-3$, al desarrollar la expresión pedida y reemplazar nos queda

$$\begin{aligned} & (a^3+b^3+c^3)(1/a^3+1/b^3+1/c^3) \\ = & \left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)+\left(\frac{b^3}{a^3}+\frac{c^3}{b^3}+\frac{a^3}{c^3}\right)+3 \\ = & \left(x^3-3z-3t-6\right)+\left(y^3-3z-3t-6\right)+3 \\ = & x^3+y^3-6(z+t)-9 \\ = & x^3+y^3-6(xy-3)-9 \\ = & x^3+y^3-6xy+9. \end{aligned}$$

La relación dada es equivalente a $x+y=12$, entonces por MA-MG se cumple que $xy\leq 36$.

Reemplazando nos queda

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 - 6xy + 9 \\ = \quad & (x+y)(x^2 - xy + y^2) - 6xy + 9 \\ = \quad & 12(12^2 - 3xy) - 6xy + 9 \\ = \quad & 12^3 - 42xy + 9 \\ \geq \quad & 12^3 - 42(36) + 9 \\ = \quad & 1728 - 1512 + 9 \\ = \quad & 225. \end{aligned}$$

La igualdad se obtiene con $a = b = 1$ y $c = (5 + \sqrt{21})/2$.

Respuesta: 225