ONEM ACEROS AREQUIPA

Nivel 2

PERÚ Ministerio de Educación

Ponle Punche y pensemos todos Perú

ACEROS AREQUIPA

Empresarios por la Educación

XXI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA - ACEROS AREQUIPA

ONEM-AA 2025

Etapa DRE - Nivel 2

11 de setiembre de 2025

Problema 1

Hoy fui a la universidad en un bus. El bus partió con 20 pasajeros. En cada paradero ocurrió una de las siguientes situaciones:

- bajaron 2 pasajeros y subieron 8.
- bajaron 3 pasajeros y subieron 10.

Si al paradero final llegaron 84 pasajeros, ¿cuántos paraderos tiene el bus (sin contar el inicio y el final)?

Solución

En cada paradero la cantidad de pasajeros aumentó en $8 - 2 = 6$ o $10 - 2 = 7$. Sea x la cantidad de veces que la cantidad de pasajeros aumentó en 6 y sea y la cantidad de veces que aumentó en 7. Por otro lado, la cantidad de pasajeros aumentó en total $84 - 20 = 64$, por lo cual

$$6x + 7y = 64,$$

de donde $x = 6$ y $y = 4$. Por lo tanto, la cantidad de paraderos es

$$x + y = 10.$$

Respuesta: 10

Problema 2

Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = abc$ y $ab + bc + ca = 10$. Determine el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}.$$

Solución

Notemos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} = \frac{abc-b}{b} = ac - 1.$$

Análogamente

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = bc - 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = ab - 1.$$

Por lo tanto

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = ab + bc + ca - 3 = 10 - 3 = 7.$$

Respuesta: 7

Problema 3

Consideremos la siguiente secuencia de 1012 números:

$$3 \times 2^1, \quad 5 \times 2^2, \quad 7 \times 2^3, \quad \dots, \quad 2025 \times 2^{1012}.$$

Determine cuántos de esos 1012 números son cuadrados perfectos.

Solución

Cada número es de la forma $N = (2k+1) \times 2^k$, donde $1 \leq k \leq 1012$. Entonces, para que N sea un cuadrado perfecto k tiene que ser par y $2k+1$ debe ser un cuadrado perfecto. Luego, $2k+1$ puede tomar cualquiera de los siguientes valores:

$$9 = 3^2, 25 = 5^2, 49 = 7^2, \dots, 2025 = 45^2.$$

Donde, cada uno de estos cuadrados perfectos nos da un valor de k. Por lo tanto, k puede tomar 22 valores.

Respuesta: 22

Problema 4

Andrés tiene tres pares de medias en un cajón: un par verde, un par azul y un par negro. Andrés saca sin ver dos medias (una por una) y las coloca en una bolsa. Luego saca sin ver otras dos medias entre las que quedan (una por una) y las coloca en otra bolsa. Por último, saca del cajón las últimas dos medias y las coloca en una tercera bolsa. Si p es la probabilidad de que alguna de las bolsas tenga dos medias del mismo color, determine el valor de $360p$.

Solución

Hay $\binom{6}{2} = 15$ maneras de elegir el par de medias para la primera bolsa y solo hay tres casos en el que obtenemos un par de medias del mismo color. Entonces hay $\frac{1}{5}$ de probabilidad de que la primera bolsa tenga un par del mismo color y $\frac{4}{5}$ de que no.

Si las medias de la primera bolsa son del mismo color ya obtenemos lo que queremos. En caso contrario, supongamos sin pérdida de generalidad, que en la primera bolsa hay una media verde y una media azul, entonces quedarían una media verde, una media azul y dos medias negras.

Hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de elegir el par de medias para la segunda bolsa y solo hay dos casos favorables: si elegimos dos medias negras o si elegimos una media verde y una media azul (en este caso la tercera bolsa tendría dos medias del mismo color). Entonces hay $\frac{1}{3}$ de probabilidad de que la segundo o tercera bolsa tenga un par del mismo color y $\frac{2}{3}$ de que no.

Por lo tanto, la probabilidad de que una de las bolsas tenga un par de medias del mismo color es

$$p = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{15}.$$

Nos pide $360p = 168$.

Respuesta: 168

Problema 5

Sea D un punto del lado AC de un triángulo ABC tal que $BC = BD$. Si $\angle DBA = 3\angle DAB$ y $AD = DC + 2BD$, determine la medida del ángulo $\angle BAC$.

Solución

Sea $\angle DAB = \alpha$, $\angle DBA = 3\alpha$, $BC = BD = a$ y $CD = b$, entonces $AD = 2a + b$ y $\angle BDC = \angle BCD = 4\alpha$. Sea E un punto del lado AC tal que $ED = a$, entonces $\angle BED = \angle EBD = 2\alpha$ y $\angle ABE = \alpha$, por lo cual $BE = AE = a + b = EC$.

Luego $\angle EBC = \angle ACB = 4\alpha$, entonces en el triángulo EBC se tiene:

$$2\alpha + +4\alpha + 4\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 18°.$$

Respuesta: 18

Problema 6

Sean p, q y r números primos tales que $p < q < r$ y $(p+q)(q+r)(r+p) = 11286$. Determine el valor de $p+q+r$.

Solución

Tenemos que

$$(p+q)(q+r)(r+p) = 2 \times 3^3 \times 11 \times 19.$$

Si $p > 2$, entonces p, q y r serían impares, por lo cual $p+q$, $q+r$ y $r+p$ serían pares, de donde el producto $(p+q)(q+r)(r+p)$ sería múltiplo de 8, lo cual es una contradicción.

En consecuencia, $p = 2$ y

$$(q+2)(r+2)(q+r) = 2 \times 3^3 \times 11 \times 19.$$

Luego, como $q+2$ y $r+2$ son divisores de 11286, entonces

$$q, r \in \{7, 17, 31, 97, \ldots\}.$$

Si $q \geq 17$, entonces $r \geq 31$ y

$$(q+2)(r+2)(q+r) \geq 19 \times 33 \times 48 > 2 \times 3^3 \times 11 \times 19,$$

lo cual no es posible.

Por lo tanto $q = 7$ y $r = 31$. Nos piden

$$p+q+r = 2+7+31 = 40.$$

Respuesta: 40

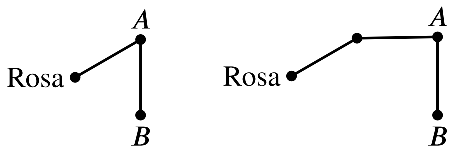
Problema 7

En la fiesta de Rosa hay 45 personas, incluyéndola. Cada persona conoce a Rosa o conoce a alguien que la conoce. También, cada persona, excepto Rosa, conoce a exactamente dos personas en la fiesta. Además, si A y B conocen a Rosa, entonces A y B no se conocen ni tienen otro conocido en común, aparte de ella. ¿A cuántas personas de la fiesta conoce Rosa?

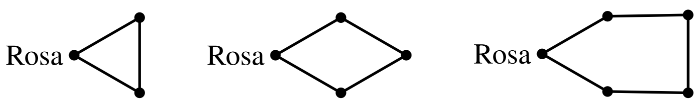
Solución

Si A es una de las personas de la fiesta que no es Rosa, entonces A conoce a Rosa o conoce a alguien que conoce a Rosa, lo cual podemos representar de la siguente manera (la relación de conocidos está representada por una línea):

Luego, A es amiga de otra persona B, lo cual se representa de la siguiente manera:

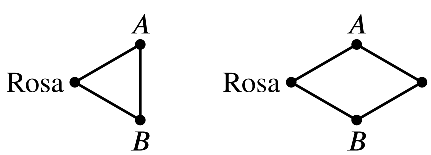


Además, B conoce a Rosa o conoce a alguien que conoce a Rosa, por lo cual toda persona A se encuentra en un grupo de una de las siguientes formas:

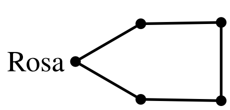


Notemos que cada persona (excepto Rosa) de cada grupo ya conoce a dos personas en el grupo por lo cual todos los grupos son disjuntos excepto por Rosa que pertenece a todos los grupos.

Por otro lado, las personas A y B en los siguientes grupos



conocen a Rosa, sin embargo se conocen entre sí o tienen un conocido en común aparte de Rosa, lo cual no puede ocurrir. En consecuencia todos los grupos son de la forma:

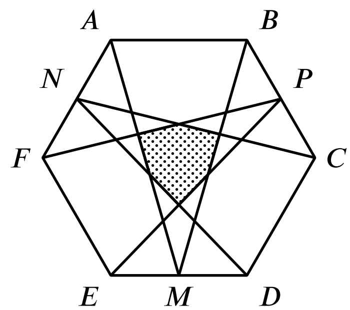


Cada grupo, sin contar a Rosa, tiene 4 personas, entonces la cantidad de grupos es $\frac{44}{4} = 11$. Además, Rosa conoce a exactamente dos personas de cada grupo, por lo tanto, la cantidad de personas que conoce a Rosa es $2 \times 11 = 22$.

Respuesta: 22

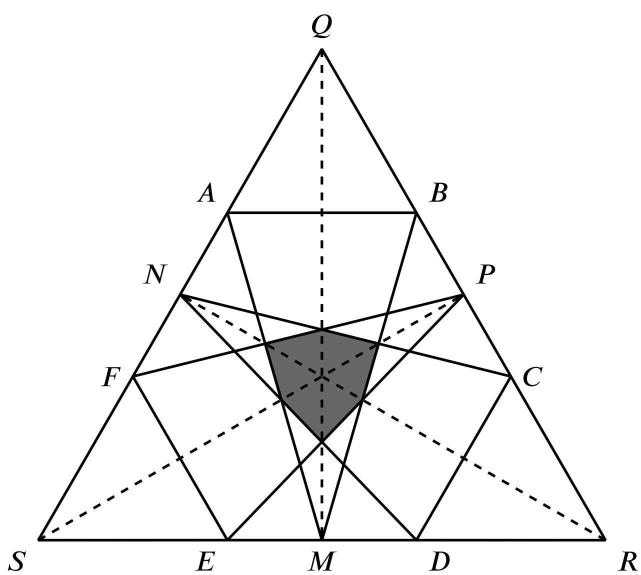
Problema 8

En la figura $ABCDEF$ es un hexágono regular de área 420 m^2. Si M, N y P son los puntos medios de los lados DE, FA y BC, respectivamente. Determine el área del hexágono sombreado en metros cuadrados.

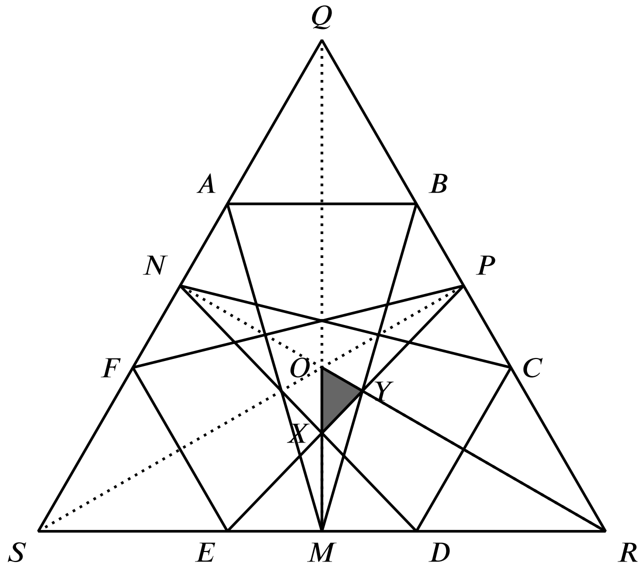


Solución

Sean $Q = FA \cap BC$, $R = BC \cap DE$ y $S = DE \cap FA$. Por simetría QM, RN y PS pasan por los vértices del hexágono sombreado y lo dividen en seis triángulos congruentes.



Hallaremos el área del triángulo XOY.



Como O es el centro del triángulo equilátero QRS, entonces $\dfrac{PO}{OS} = \dfrac{1}{2}$. Además, $ME = MD = a$ y $SE = DR = 2a$. Luego, por el teorema de Menelao tenemos que

$$SE \cdot MX \cdot OP = EM \cdot XO \cdot SP,$$

de donde $\dfrac{OX}{XM} = \dfrac{2}{3}$. Además

$$SE \cdot RY \cdot OP = ER \cdot YO \cdot SP,$$

de donde $\dfrac{OY}{YR} = \dfrac{1}{6}$.

En consecuencia, el área del triángulo OXY es igual a $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{2}{35}$ del área del triángulo OMR. Por lo tanto, el área del hexágono sombreado es igual a $\dfrac{2}{35}$ del área del triángulo QRS que es igual a $\dfrac{3}{2}$ del área del hexágono $ABCDEF$, es decir

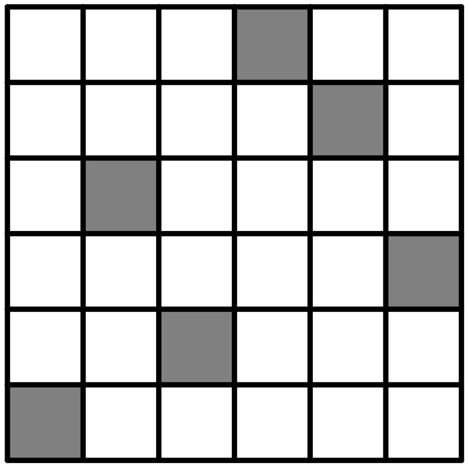
$$\frac{2}{35} \times \frac{3}{2} \times 420 = 36.$$

Respuesta: 36

Problema 9

En cada casilla de un tablero de 6×6 se escribe un número entero de tal modo que la suma de los números en cada fila, en cada columna y en cada *diagonal generalizada* sea positiva. Determine el menor valor que puede tomar la suma de todos los números escritos en el tablero.

Aclaración: una diagonal generalizada es cualquier conjunto de 6 casillas donde no hay dos de ellas en la misma fila ni en la misma columna.



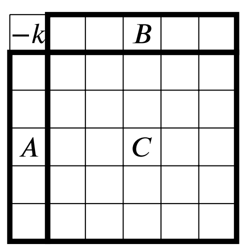
La figura muestra una diagonal generalizada.

Solución

Sea S la suma de todos los números del tablero. Un ejemplo con $S = 11$ es el siguiente:

0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

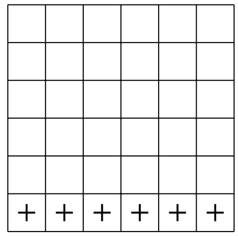
Ahora, supongamos que existe un ejemplo donde $S \leq 10$. Si un número es negativo, digamos igual a $-k$ ($k \geq 1$), supongamos, sin pérdida de generalidad, que está en la esquina superior izquierda:



Entonces, los rectángulos A y B tienen suma mayor o igual que $k + 1$ y el cuadrado C tiene suma mayor o igual que $5(k + 1)$. Por lo cual $S \geq 6k + 7 \geq 13$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, si existe tal ejemplo tiene que estar formado solo por 0's y números positivos.

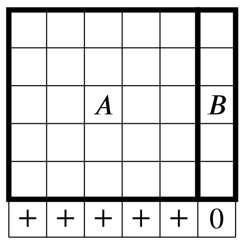
Contamos la cantidad de números positivos en cada fila y en cada columna. Sea M el mayor de estos 12 números. Sin perdida de generalidad, supongamos que la fila o columna con M números positivos siempre es la última fila.

Si $M = 6$, entonces las cinco primeras filas tienen suma mayor o igual que 1:



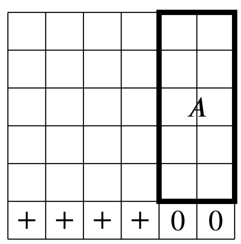
Por lo cual $S \geq 5 + 6 = 11$, lo cual es una contradicción.

Si $M = 5$, entonces el cuadrado A tiene suma mayor o igual que 5 y el rectángulo B tiene suma mayor o igual que 1:

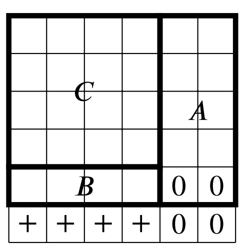


Por lo cual $S \geq 5 + 1 + 5 = 11$, lo cual es una contradicción.

Si $M = 4$. Si el rectángulo A tiene una fila con dos ceros:

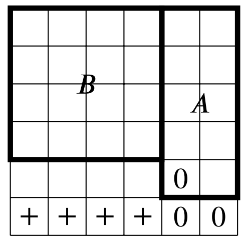


Entonces el rectángulo A tiene suma mayor o igual que 2, el rectángulo B tiene suma mayor o igual que 1 y el cuadrado C tiene suma mayor o igual que 4:



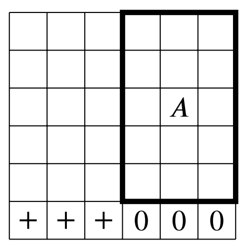
Por lo cual $S \geq 2 + 1 + 4 + 4 = 11$, lo cual es una contradicción.

En caso contrario, si cada fila del rectángulo A tiene un número positivo, sabemos que la primera columna de A tiene otro número 0, entonces el rectángulo A tiene suma mayor o igual que 5 y el rectángulo B tiene suma mayor o igual que 4:

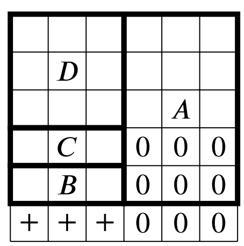


Por lo cual $S \geq 5 + 4 + 4 = 13$, lo cual es una contradicción.

Si $M = 3$. Si el rectángulo A tiene al menos dos filas de ceros:

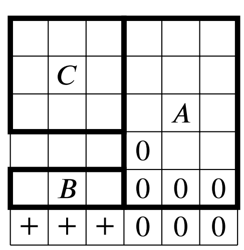


Entonces el rectángulo A tiene suma mayor o igual que 3, los rectángulos B y C tienen suma mayor o igual que 1 y el cuadrado D tiene suma mayor o igual que 3:



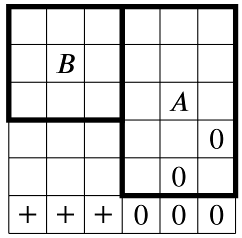
Por lo cual $S \geq 3 + 1 + 1 + 3 + 3 = 11$, lo cual es una contradicción.

Si el rectángulo A tiene exactamente un fila de ceros, la primera columna de A tiene otro número 0. Entonces el rectángulo A tiene suma mayor o igual que 4, el rectángulo B tiene suma mayor o igual que 1 y el cuadrado C tiene suma mayor o igual que 3:



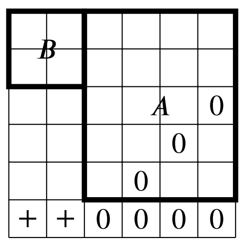
Por lo cual $S \geq 4 + 1 + 3 + 3 = 11$, lo cual es una contradicción.

Si cada fila del rectángulo A tiene un número positivos, la segunda columna de A tiene otro número 0 y la tercera columna de A tiene otro número 0 en una fila distinta. Entonces el rectángulo A tiene suma mayor o igual que 5 y el cuadrado B tiene suma mayor o igual que 3:

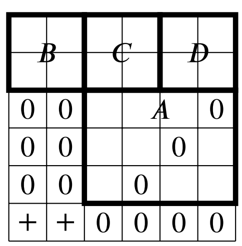


Por lo cual $S \geq 5 + 3 + 3 = 11$, lo cual es una contradicción.

Si $M = 2$. La segunda columna de A tiene otro número 0, la tercera columna de A tiene otro número 0 en una fila distinta y la cuarta columna de A tiene otro número 0 en una fila distinta. Entonces el cuadrado B tiene suma mayor o igual que 2:



Por lo cual, las otras casillas de las primeras dos columnas del tablero contienen solo números 0. Luego, los cuadrados C y D tinen suma mayor o igual que 2 y las 3 filas restantes de A tienen suma mayor o igual que 1.



Por lo cual $S \geq 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11$, lo cual es una contradicción.
Finalmente, si $M = 1$, entonces cada fila y cada columna tiene exactamente un número positivo, por lo cual los 6 números positivos se encuentran solo en una diagonal generalizada, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, $S \geq 11$, por lo cual el menor valor posible de S es 11.

Respuesta: 11

Problema 10

Determine el menor número entero positivo k que cumple la siguiente condición: No existe un divisor de 6^{2025} de la forma $n(n+k)$, donde n es un entero positivo.

Solución

Como 2025 es suficientemente grande, cuando tengamos un ejemplo para algún k con un divisor "pequeño"también tendremos ejemplo para $2k$ y $3k$ ya que si $n(n+k)$ es un divisor "pequeño"de 6^{2025}, entonces $2n(2n+2k)$ y $3n(3n+3k)$ también son divisores de 6^{2025}.

$k=1$ cumple ya que $1(1+1)$ es divisor de 6^{2025}, entonces también cumplen 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32 y 36.

$k=5$ cumple ya que $1(1+5)$ es divisor de 6^{2025}, entonces también cumplen 10, 15, 20, 30 y 40.

$k=7$ cumple ya que $1(1+7)$ es divisor de 6^{2025}, entonces también cumplen 14, 21 y 28.

$k=11$ cumple ya que $1(1+11)$ es divisor de 6^{2025}, entonces también cumplen 22 y 33.

$k=13$ cumple ya que $3(3+13)$ es divisor de 6^{2025}, entonces también cumple 26 y 39.

$k=17$ cumple ya que $1(1+17)$ es divisor de 6^{2025}, entonces también cumple 34.

$k=19$ cumple ya que $8(8+19)$ es divisor de 6^{2025}, entonces también cumple 38.

$k=23, 25, 29, 31, 35$ y 37 cumplen ya que $1(1+23)$, $2(2+25)$, $3(3+29)$, $1(1+31)$, $1(1+35)$ y $27(27+37)$ son divisores de 6^{2025}.

En consecuencia, se cumple para todo $1 \leq k \leq 40$.

Ahora, supongamos que existe un entero positivo n tal que $n(n+41)$ es divisor de 6^{2025}, entonces $n = 2^a \times 3^b$ y $n+41 = 2^c \times 3^d$, donde a, b, c, d son enteros no negativos.

Claramente $n=1$ no cumple, así que $n \geq 2$. Si n es par, entonces $n+1$ es impar, por lo que $c=0$ y $d>0$, de donde $b=0$ pues n no puede ser múltiplo de 3.

De este modo $(n+41)-n = 3^d - 2^a = 41$. $a = 1$ no cumple por lo que $a \geq 2$, entonces $3^d \equiv 1 \pmod 4$, de donde d es impar. Además, $2^a \equiv 1 \pmod 3$, por lo que a es par.

Sean $a = 2x$ y $d = 2y$, donde x y y son enteros positivos. Entonces

$$3^d - 2^a = (3^x + 2^y)(3^x - 2^y) = 41,$$

de donde $3^x + 2^y = 41$ y $3^x - 2^y = 1$, por lo cual $3^x = 21$ y $2^y = 20$, lo cual es una contradicción.

Si n es impar, entonces $a = 0$ y n es múltiplo de 3, por lo cual $d = 0$, pues $n + 41$ no puede ser múltiplo de 3.

De este modo $(n+41)-n = 2^c - 3^b = 41$. Claramente $c \geq 6$, entonces $3^b \equiv -41 \equiv -9 \pmod{32}$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, el mínimo es 41.

Respuesta: 41