# ONEM

# ACEROS AREQUIPA

## Nivel 1

PERÚ Ministerio de Educación

Ponle Punche y ganemos todos Perú

ACEROS AREQUIPA

Empresarios por la Educación

XXI Olimpiada Nacional Escolar de Matemática - Aceros Arequipa

ONEM-AA 2025

**Etapa DRE - Nivel 1**

11 de setiembre de 2025

---

# Problema 1

Pedro, Luis y Omar son tres hermanos. Se sabe que dos de ellos son gemelos y el otro es mayor que los gemelos. Si la suma de las edades de Luis y Omar es 23, determina el mayor valor posible de la edad de Pedro.

## Solución

Como la suma de las edades de Luis y Omar es impar, no es posible que sean los gemelos, entonces Pedro es uno de los gemelos. Sea $a$ la edad de los gemelos y $b$ la edad del otro hermano, entonces $a < b$ y $a + b = 23$. Reemplazando obtenemos $a < 23 - a$, de donde $2a < 23$ y en consecuencia el mayor valor posible de $a$ (edad de Pedro) es 11.

**Respuesta: 11**

# Problema 2

Un documental está dividido en 5 capítulos de igual duración. Cuando ya he visto los tres primeros capítulos y estoy en el $x\,\%$ del cuarto capítulo, resulta que he visto el $x\,\%$ de todo el documental. Calcula el valor de $x$.

## Solución

Supongamos que cada capítulo dura $t$ (en cualquier unidad de tiempo). Entonces cuando ya he visto $x\,\% \cdot t$ del cuarto capítulo, he visto en total $3t + x\,\% \cdot t$, este número representa el $x\,\%$ del total que es $5t$, entonces:

$$\frac{3t + x\,\% t}{5t} = x\,\%$$

simplificando resulta $3 + x\,\% = 5x\,\%$, de donde $x = 75$.

**Respuesta: 75**

# Problema 3

Mientras limpiaba su cuarto, Mateo encontró el calendario que hace unos años le habían regalado por navidad en el mercado. Antes de tirarlo notó que en cierto mes había exactamente cinco domingos y exactamente dos de esos domingos tenían fecha impar. ¿Cuál es la suma de los dos días de esas fechas?

## Solución

Si la fecha del primer domingo es $n$ entonces las otras fechas son $n+7$, $n+14$, $n+21$ y $n+28$. Como $n+28 \leq 31$, entonces $n$ puede ser 1, 2 o 3.

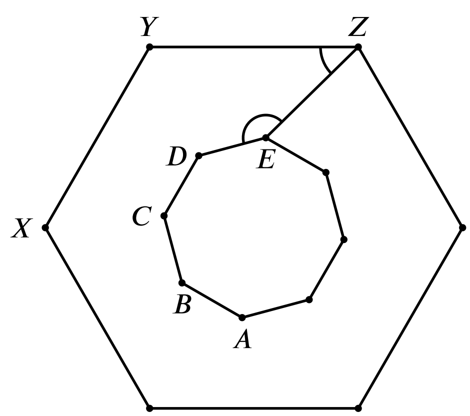
- Para $n = 1$ las 5 fechas son: 1, 8, 15, 22, 29 (3 impares y 2 pares).
- Para $n = 2$ las 5 fechas son: 2, 9, 16, 23, 30 (2 impares y 3 pares).
- Para $n = 3$ las 5 fechas son: 3, 10, 17, 24, 31 (3 impares y 2 pares).

Por lo tanto, la única posibilidad es $n = 2$ y la suma de las fechas impares es $9 + 23 = 32$.

**Respuesta: 32**

# Problema 4

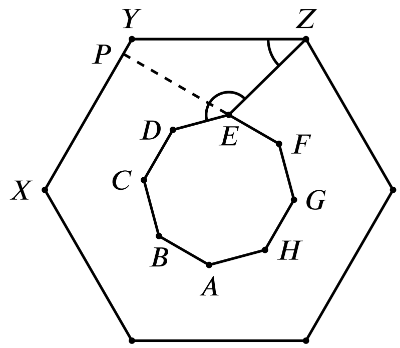
En la siguiente figura, se muestra un hexágono regular y un octágono regular de tal manera que el lado $AB$ del octágono es perpendicular al lado $XY$ del hexágono.




Calcula el valor de $x$ si se cumple que $\angle YZE = x°$ y $\angle DEZ = (4x)°$.

## Solución

Sea $ABCDEFGH$ el octágono regular. Como los lados $AB$ y $EF$ son paralelos, entonces $EF$ es perpendicular a $XY$. Sea $P$ el punto de intersección de $EF$ con $XY$.




Como $\angle PED = 45°$, sumando los ángulos del cuadrilátero $PYZE$ obtenemos:

$$90 + 120 + x + (4x - 45) = 360 \quad \rightarrow \quad x = 39.$$

**Respuesta: 39**

# Problema 5

Se tiene un conjunto formado por cuatro números enteros positivos distintos. Al sumarlos de dos en dos se obtienen seis números consecutivos (en algún orden). Si la suma de los cuatro números es 2025, determina el mayor de los cuatro números.

## Solución

Sean $a < b < c < d$ los números y $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ las seis sumas. La menor suma es $a+b$ y la mayor es $c+d$, entonces $a+b = n$ y $c+d = n+5$, con lo cual $a+b+c+d = 2n+5 = 2025$, de donde $n = 1010$. La segunda menor suma es $a+c$, entonces $a+c = 1011$. La segunda mayor suma es $b+d$, entonces $b+d = 1014$. Tenemos entonces dos casos:

- Las sumas son $a+b = 1010$, $a+c = 1011$, $b+c = 1012$, $a+d = 1013$, $b+d = 1014$, $c+d = 1015$. De las dos primeras ecuaciones resulta que $c = b+1$ y reemplazando en la tercera ecuación resulta $2b+1 = 2012$ que no tiene solución entera.
- Las sumas son $a+b = 1010$, $a+c = 1011$, $a+d = 1012$, $b+c = 1013$, $b+d = 1014$, $c+d = 1015$. De las dos primeras ecuaciones resulta que $c = b+1$ y reemplazando en la cuarta ecuación resulta que $2b+1 = 1013$, de donde $b = 506$. Reemplazando en las otras ecuaciones resulta $a = 504$, $c = 507$ y $d = 508$. Es decir, el mayor número es 508.

**Respuesta: 508**

# Problema 6

Emilia quiere escribir $k$ números enteros positivos, no necesariamente distintos, cuya suma sea 1645, pero quiere que todos esos números usen el mismo dígito en su representación decimal. Halle el menor valor de $k$ para el cual esta situación es posible.

*Aclaración:* A modo de ejemplo, considere que los números 333, 33, 333 y 333333 usan el mismo dígito en su representación decimal. Los números 888, 888 y 8888 también usan el mismo dígito en su representación decimal.

## Solución

Supongamos que los $k$ números enteros positivos usan todos el mismo dígito $d$. Si $k$ fuera par, al sumar los dígitos de las unidades obtendríamos un dígito par, lo cual no es posible porque el dígito de las unidades de la suma es 5. Por lo tanto, $k$ es impar.

Es claro que $k = 1$ no es posible. Analicemos ahora $k = 3$. Al ver el dígito de las unidades de la suma notamos que $d + d + d$ termina en 5, entonces $d = 5$. Entonces llevamos 1 al dígito de las decenas y cada dígito de las decenas de los tres números es 0 o 5, entonces el dígito de las decenas de la suma es 1 o 6, y no puede ser 4. Por lo tanto, $k = 3$ no es posible.

Finalmente, sí tenemos un ejemplo con $k = 5$:

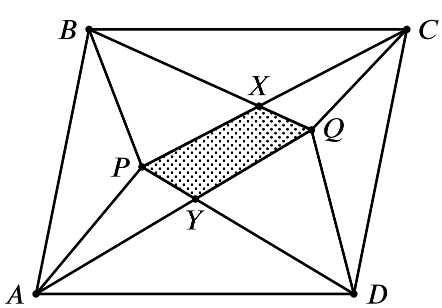
$$7 + 7 + 77 + 777 + 777 = 1645.$$

Por lo tanto, el menor valor posible de $k$ es 5.

**Respuesta: 5**

# Problema 7

En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo, $P$ y $Q$ son puntos interiores tales que $BQDP$ también es un paralelogramo. Además, $X$ es el punto de intersección de $BQ$ y $PC$, mientras que $Y$ es el punto de intersección de $PD$ y $AQ$.




Calcule el área sombreada, si las áreas de los triángulos $APB$ y $BXC$ son 16 y 20, respectivamente.

## Solución

Como $BQDP$ es un paralelogramo entonces $BP$ y $QD$ son paralelos y miden lo mismo, entonces los triángulos $ABP$ y $CDQ$ son congruentes. De la congruencia, los segmentos $AP$ y $QC$ son paralelos y miden lo mismo, entonces $APCQ$ es un paralelogramo. Luego, los triángulos $BXC$ y $DYA$ son congruentes.
Por otro lado, en el paralelogramo $APCQ$, como $PY$ es paralelo a $XQ$, entonces los triángulos $APY$ y $CQX$ son congruentes. De forma similar, los triángulos $BXP$ y $DYQ$ también son congruentes.
Usamos corchetes para denotar área, entonces $[ABP] + [CPD]$ es igual a la mitad del área del paralelogramo $ABCD$. Además, $[BPC] + [APD]$ también es igual a la mitad del área del paralelogramo $ABCD$. Entonces:

$$[ABP] + [CPD] = [BPC] + [APD]$$

reemplazando:

$$16 + [PXQY] + [CQX] + [DQY] + 16 = [BXP] + 20 + [APY] + 20,$$

como $[CQX] = [APY]$ y $[DQY] = [BXP]$, concluimos que $[PXQY] = 40 - 32 = 8$.

**Respuesta: 8**

# Problema 8

Se tiene un cubo y una moneda equilibrada, es decir, si lanzamos esa moneda, la probabilidad de que salga cara es igual a la probabilidad de que salga sello. Por cada vértice del cubo se lanza la moneda, si sale cara se pinta dicho vértice de rojo y si sale sello se pinta de azul. Sea $p$ la probabilidad de que exactamente una cara del cubo tenga todos sus vértices del mismo color. Calcula el valor de $512p$.

## Solución

Cada vértice puede ser rojo o azul, entonces tenemos $2^8 = 256$ posibilidades, vamos a ver en cuántas de ellas hay exactamente una cara con sus cuatro vértices del mismo color. Si $n$ es este número, la probabilidad pedida es $p = \frac{n}{256}$.
Hay 6 formas de escoger la cara y 2 formas de escoger el color de los cuatro vértices de esa cara. Supongamos sin pérdida de generalidad que la cara escogida es la inferior y que los cuatro vértices son rojos. Veamos de cuántas formas se puede escoger el color de los cuatro vértices superiores para que solo la cara inferior tenga sus vértices del mismo color.
Denotamos con $A$ y $R$ a los colores. Los cuatro vértices superiores no pueden ser todos $A$ o todos $R$, tenemos los siguientes casos:

- Hay un $A$ y 3 $R$. Sin importar cómo se distribuyan habrá dos vértices consecutivos de la cara superior que sean $R$ con lo cual habrá una cara que tiene sus cuatro vértices $R$.
- Hay 2 $A$ y 2 $R$. Es claro que las 2 $A$ deben estar en vértices diagonalmente opuestos y lo mismo con las 2 $R$. Luego, en este caso hay 2 formas.

- Hay 3 $A$ y 1 $R$. En este caso, esos colores se pueden distribuir de cualquier manera, entonces tenemos 4 formas en este caso.

Por lo tanto, $n = 6 \times 2 \times (2 + 4)$ con lo cual $p = \frac{n}{256}$ y nos piden $512p = 2n = 144$.

**Respuesta: 144**

# Problema 9

El primer término de una secuencia es un número entero positivo menor o igual que 999. Si un término de la secuencia es par, el siguiente término es la mitad. Si un término es impar, el siguiente término se obtiene al eliminar el dígito de las unidades de dicho término. Cuando aparece un término de un dígito la secuencia termina. Halla la mayor cantidad de términos que puede tener la secuencia.

## Solución

Vamos a demostrar que si un término de la secuencia es $n$, donde $n$ tiene dos o más dígitos, entonces el siguiente término es menor o igual que $\frac{n}{2}$. Si $n$ es par, entonces el siguiente término es $\frac{n}{2}$. Si $n$ es impar, el siguiente término es $\frac{n-d}{10}$, donde $d$ es el dígito de las unidades de $n$, entonces $\frac{n-d}{10} \leq \frac{n}{10} \leq \frac{n}{2}$.
Si el primer término de la secuencia tiene 1 dígito, la secuencia solo tendrá un término. Sea $a_1, a_2, \ldots$ la secuencia y $a_k$ el primer término que tiene 1 dígito (último término), entonces todos los anteriores tienen dos o más dígitos. Supongamos que $k \geq 9$, entonces $a_{k-1} \geq 10$, $a_{k-2} \geq 20$, $a_{k-3} \geq 40$, …, $a_{k-8} \geq 10 \cdot 2^7$. Como $k \geq 9$, entonces $a_1 \geq a_{k-8} \geq 1280$, que es una contradicción.
Por lo tanto, $k \leq 8$. Un ejemplo con 8 términos es el siguiente:

$$640, 320, 160, 80, 40, 20, 10, 5$$

**Respuesta: 8**

# Problema 10

Para cada número entero positivo $n$ sea $S(n)$ la suma de los dígitos de $n$. Calcule el valor de

$$S(7) + S(14) + S(21) + S(28) + S(35) + \cdots + S(7000).$$

## Solución

Agreguemos 0 a la izquierda de los primeros números para que todos los números tengan 4 dígitos. De esta forma tenemos: $0007, 0014, 0021, 0028, \ldots, 7000$. Para cada uno de esos números consideremos el bloque formado por los tres dígitos de la derecha. Tenemos 1000 bloques y vamos a demostrar que todos los bloques son distintos. Supongamos que haya dos bloques iguales, entonces tenemos dos números $a$ y $b$ en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

tales que $7a$ y $7b$ coinciden en los últimos tres dígitos, es decir, tienen el mismo resto al ser divididos entre 1000. Luego, su diferencia es múltiplo de 1000, es decir, $7a - 7b$ es múltiplo de 1000, de donde $a - b$ es múltiplo de 1000, lo cual no es posible porque ambos pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$.

Por lo tanto, los 1000 bloques son $000, 001, 002, 003, \dots, 999$ en algún orden. Con lo cual la suma de esos 3000 dígitos es $(0 + 1 + 2 + \cdots + 9) \times 300$ porque cada dígito aparece 300 veces.

Falta ver los dígitos de la izquierda (millares). Haciendo las divisiones, se comprueba que el dígito 0 aparece 142 veces, el dígito 1 aparece 143 veces, el dígito 2 aparece 143 veces, el dígito 3 aparece 143 veces, el dígito 4 aparece 143 veces, el dígito 5 aparece 143 veces, el dígito 6 aparece 142 veces y el digito 7 solo 1 vez. Entonces la suma de todos los 3000 dígitos es

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 143 + 6 \times 142 + 7 + 45 \times 300 = 16504.$$

$\boxed{\textbf{Respuesta: 16 504}}$