XXI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA - ACEROS AREQUIPA

ONEM-AA 2025

Etapa DRE - Nivel 3

11 de setiembre de 2025

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 120 minutos para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- En este examen, **los problemas 1 y 2 deben resolverse justificando y desarrollando el procedimiento en las hojas destinadas para ello**. En los problemas del 3 al 10 basta con escribir únicamente el resultado final en la hoja de respuestas.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, **haz entrega de las hojas de desarrollo de tus soluciones para los problemas 1 y 2, y de la hoja de respuestas para los problemas del 3 al 10**. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En una feria municipal, José quiere comprar un libro que cuesta 98 soles. Él tiene un cupón de 50 soles, tres cupones de 20 soles, cuatro cupones de 5 soles y un cupón de 1 sol. Si el valor de los cupones excede el valor del libro, la diferencia no le será devuelta en dinero. Encuentra la menor cantidad de soles que José perderá al comprarse el libro usando sus cupones.

2. Al multiplicar un número de cinco dígitos por 6 obtenemos otro número de cinco dígitos, como se muestra

$$\overline{RADAR} \times 6 = \overline{LUNES},$$

donde cada letra representa un dígito y, además, letras distintas corresponden a dígitos diferentes. Encuentra el valor de $R + A + L + N + S$, si sabemos que $D = 4$.

3. Un conjunto $\mathcal{A}$ está formado por cinco enteros distintos. Al sumar cada pareja de números distintos en $\mathcal{A}$ obtenemos los siguientes resultados:

$$\{9, 13, 14, 17, 18, 22, 33, 34, 38, 42\}.$$

Encuentra el valor de la suma de la media y la mediana del conjunto $\mathcal{A}$.

Aclaración: La mediana de un conjunto de números con una cantidad impar de elementos es igual al elemento ubicado en el centro cuando son ordenados de menor a mayor.

4. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AD y BE, cuyas longitudes son $AD = 60$ y $BE = 56$. Si el lado AB mide 65, determina el perímetro del triángulo ABC.

5. Encuentra el menor número entero positivo de k para el cual la ecuación

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = kx(x-5) + 24$$

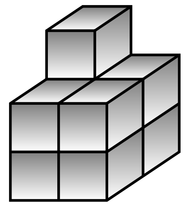
tiene exactamente cuatro soluciones reales distintas.

6. En un proceso de selección laboral para un puesto de revisor técnico, cada uno de los 60 postulantes rindió 5 exámenes. Para ser contratado, un postulante debía cumplir al menos una de las siguientes condiciones:

- Obtener el primer puesto en por lo menos uno de los exámenes.
- Estar entre los siete primeros puestos en por lo menos cuatro de los exámenes.

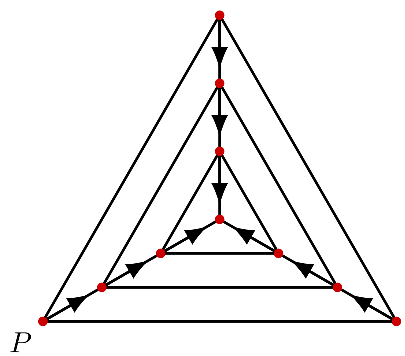
Se sabe que en ninguno de los exámenes hubo empates en las calificaciones. ¿Cuál es el máximo número de postulantes que pudieron ser contratados?

7. Juan tiene un bloque formado por 9 cubos apilados sobre una mesa, tal como se muestra en la figura:



Juan quiere guardar todos sus cubos retirándolos uno por uno. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo, considerando que no puede retirar un cubo antes de haber retirado todos los que están encima de él?

8. Una araña desea desplazarse desde el punto P hasta el centro de la telaraña.



En su recorrido puede pasar una o más veces por un mismo punto, pero no puede repetir ningún segmento. Además, si un segmento tiene una flecha, la araña debe seguir obligatoriamente la dirección indicada por dicha flecha. ¿Cuántos caminos distintos puede seguir la araña?

9. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tal que $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 4$ y $DA = 6$. Sea X un punto de la prolongación del segmento DB por B tal que $XD = 2XA = 2XC$. Sean Y y Z puntos de los segmentos XA y XC, respectivamente, tales que Y, B y Z son colineales. Sea p el menor valor que puede tomar el perímetro del triángulo XYZ. Si $p^2 = \dfrac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos coprimos, determine el valor de $m + n$.

10. Sean a, b y c números reales positivos tales que

$$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 15.$$

Encuentra el menor valor posible de

$$(a^3+b^3+c^3) \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right).$$