XXI Olimpiada Nacional Escolar de Matemática - Aceros Arequipa

ONEM-AA 2025

Etapa DRE - Nivel 2

11 de setiembre de 2025

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 120 minutos para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- En este examen, **los problemas 1 y 2 deben resolverse justificando y desarrollando el procedimiento en las hojas destinadas para ello**. En los problemas del 3 al 10 basta con escribir únicamente el resultado final en la hoja de respuestas.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, **haz entrega de las hojas de desarrollo de tus soluciones para los problemas 1 y 2, y de la hoja de respuestas para los problemas del 3 al 10**. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Hoy fui a la universidad en un bus. El bus partió con 20 pasajeros. En cada paradero ocurrió una de las siguientes situaciones:

- bajaron 2 pasajeros y subieron 8.
- bajaron 3 pasajeros y subieron 10.

Si al paradero final llegaron 84 pasajeros, ¿cuántos paraderos tiene el bus (sin contar el inicio y el final)?

2. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=abc$ y $ab+bc+ca=10$. Determine el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}.$$

3. Consideremos la siguiente secuencia de 1012 números:

$$3\times 2^1, \quad 5\times 2^2, \quad 7\times 2^3, \quad \ldots, \quad 2025\times 2^{1012}.$$

Determine cuántos de esos 1012 números son cuadrados perfectos.

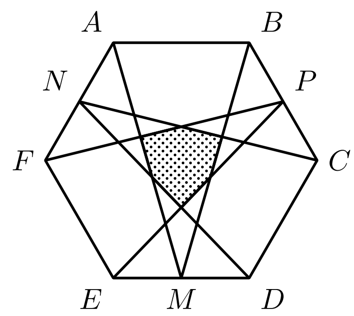
4. Andrés tiene tres pares de medias en un cajón: un par verde, un par azul y un par negro. Andrés saca sin ver dos medias (una por una) y las coloca en una bolsa. Luego saca sin ver otras dos medias entre las que quedan (una por una) y las coloca en otra bolsa. Por último, saca del cajón las últimas dos medias y las coloca en una tercera bolsa. Si p es la probabilidad de que alguna de las bolsas tenga dos medias del mismo color, determine el valor de $360p$.

5. Sea D un punto del lado AC de un triángulo ABC tal que $BC=BD$. Si $\angle DBA = 3\angle DAB$ y $AD = DC + 2BD$, determine la medida del ángulo $\angle BAC$.

6. Sean p, q y r números primos tales que $p<q<r$ y $(p+q)(q+r)(r+p)=11286$. Determine el valor de $p+q+r$.

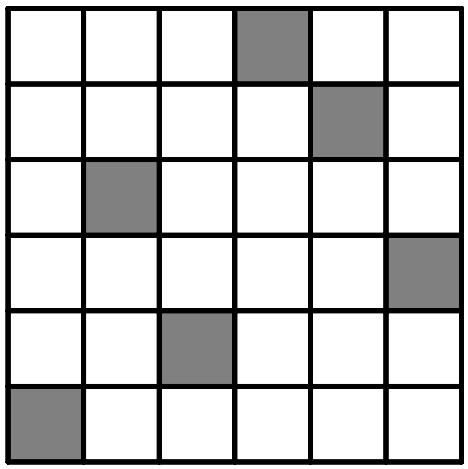
7. En la fiesta de Rosa hay 45 personas, incluyéndola. Cada persona conoce a Rosa o conoce a alguien que la conoce. También, cada persona, excepto Rosa, conoce a exactamente dos personas en la fiesta. Además, si A y B conocen a Rosa, entonces A y B no se conocen ni tienen otro conocido en común, aparte de ella. ¿A cuántas personas de la fiesta conoce Rosa?

8. En la figura $ABCDEF$ es un hexágono regular de área 420 m^2. Si M, N y P son los puntos medios de los lados DE, FA y BC, respectivamente. Determine el área del hexágono sombreado en metros cuadrados.



9. En cada casilla de un tablero de 6×6 se escribe un número entero de tal modo que la suma de los números en cada fila, en cada columna y en cada *diagonal generalizada* sea positiva. Determine el menor valor que puede tomar la suma de todos los números escritos en el tablero.

Aclaración: una diagonal generalizada es cualquier conjunto de 6 casillas donde no hay dos de ellas en la misma fila ni en la misma columna.



La figura muestra una diagonal generalizada.

10. Determine el menor número entero positivo k que cumple la siguiente condición: No existe un divisor de 6^{2025} de la forma $n(n+k)$, donde n es un entero positivo.