

# **OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICAS**

**EXÁMENES RECOPILADOS  
DESDE 2004 HASTA 2024**

# **ONEM NIVEL 3**

## **ETAPAS I.EE-UGEL-DRE- NACIONAL**





# ENTRENAMIENTO INTENSIVO

## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICAS



Clases en vivo para  
estudiantes de 1° a 5°  
de secundaria



Entrenadores especialistas  
en olimpiadas



Simulacros semanales  
nivel olimpiadas

ETAPAS • UGEL • DRE • NACIONAL



+ DE S/150,000  
EN PREMIOS



Esríbenos al +51 916841376



[www.mathAcademyperu.com](http://www.mathAcademyperu.com)

# OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

## Primera Fase – Nivel 3

21 de agosto de 2004

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba.  
En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

1. El diámetro mayor de la llanta delantera de un camión mide 100 cm. ¿Cuántas vueltas completará dicha llanta en un recorrido de 6,28 kilómetros? (Considere  $\pi = 3,14$ )

A) 1 000      B) 2 000      C) 500      D) 20      E) 100

2. En el triángulo rectángulo ABC recto en B la longitud de la hipotenusa es el triple de la longitud que uno de los catetos. Determina:

$$\frac{\sin A \cdot \sin C}{2}$$

A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{9\sqrt{8}}{8}$       C)  $\sqrt{10}$       D)  $\frac{3}{20}$       E)  $\frac{\sqrt{2}}{9}$

3. Determina el valor numérico de la siguiente expresión:

$$A = \frac{\operatorname{ctg}^2 60^\circ + \frac{1}{2} \sec^2 45^\circ - \frac{3}{2} \csc^2 60^\circ}{\sin^2 30^\circ + \frac{3}{5} \operatorname{ctg}^2 45^\circ}$$

A)  $\frac{40}{25}$       B)  $-\frac{40}{51}$       C)  $\frac{3}{5}$       D)  $\frac{21}{25}$       E)  $\frac{25}{6}$

4. Simplifica la siguiente expresión:

$$E = \left( \frac{1}{4} \cos^2 x \right) \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right); \quad 0 < x < 90^\circ$$

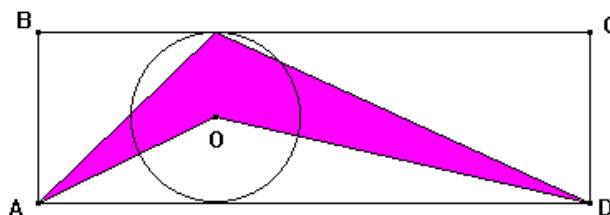
A)  $\cos x$       B)  $\sin x$       C)  $4 \sec^2 x$       D)  $4 \cos^2 x$       E)  $\sin 2x$

5. Si S y C son los números de grados que representan a un mismo ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal, respectivamente. Calcula:

$$M = \sqrt[3]{\frac{S+C}{C-S} - 11} + \sqrt{\frac{S+C}{C-S} + 45}$$

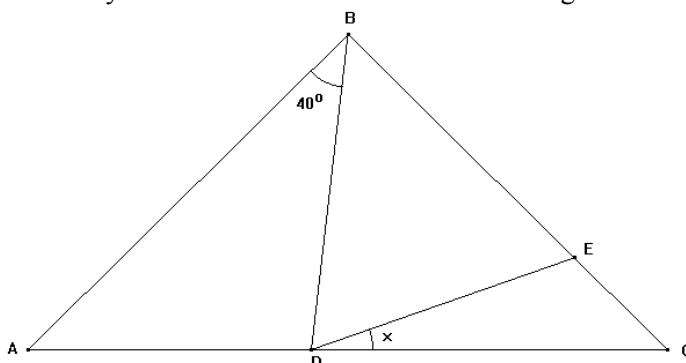
A) 10      B) 12      C) 14      D) 16      E) 18

6. En la figura, se tiene una circunferencia de centro  $O$  que es tangente a dos de los lados del rectángulo  $ABCD$ . Si  $ABCD$  tiene un área de  $12 \text{ cm}^2$ , halla el área de la región sombreada.



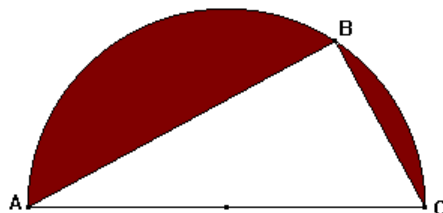
A)  $3 \text{ cm}^2$       B)  $4 \text{ cm}^2$       C)  $5 \text{ cm}^2$       D)  $2 \text{ cm}^2$       E)  $6 \text{ cm}^2$

7. En la figura,  $AB = BC$  y  $BD = BE$ . Calcula la medida del ángulo  $x$ .



A)  $20^\circ$       B)  $30^\circ$       C)  $50^\circ$       D)  $40^\circ$       E)  $10^\circ$

8. En la figura mostrada,  $AC$  es el diámetro de la semicircunferencia de radio  $r$ . Si  $\angle BCA = \theta$ , determine el área de la región sombreada.



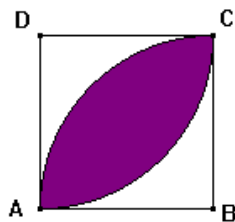
A)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} - \cos \theta \right)$       B)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} + \sin \theta \right)$       C)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} + \cos 2\theta \right)$   
D)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} - \sin 2\theta \right)$       E)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} + 2\sin \theta \right)$

9. En las orillas opuestas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una es 30 m y la de la otra es 20 m. La distancia entre sus troncos es 50 m. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Repentinamente los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, justamente sobre la línea imaginaria que une las bases de los troncos de las palmeras. Los pájaros se lanzan a la vez y llegan al pez al mismo tiempo. Considerando que los pájaros volaron en línea recta y a la misma velocidad constante, ¿a qué distancia de la base del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

A) 10 m      B) 20 m      C) 25 m      D) 30 m      E) 40 m

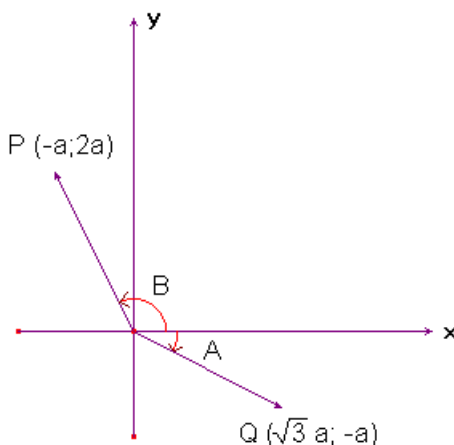
10. En la figura se observa un cuadrado  $ABCD$  de lado 4 y dos cuartos de circunferencia. Calcula el área de la región sombreada.





- A)  $8\pi - 16$       B)  $16 - 4\pi$       C)  $16\pi - 16$       D)  $16 - 2\pi$       E)  $16 + 4\pi$

11. Utiliza la figura mostrada para calcular  $E = \frac{\sin B - 3 \cos B}{\sin A - \sqrt{3} \cos A}$ .

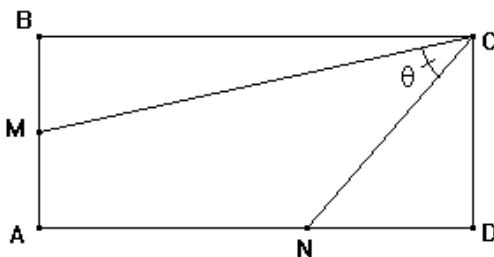


- A)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$       B)  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$       C)  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$       D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       E)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. Una persona que se encuentra en un punto P a 300 metros de altura sobre el nivel del mar observa que un barco se aleja de dicho punto con un ángulo de depresión de  $60^\circ$ ; dos minutos después la misma persona observa al barco con un ángulo de depresión de  $30^\circ$ . Si la velocidad del barco es constante, calcula su valor.

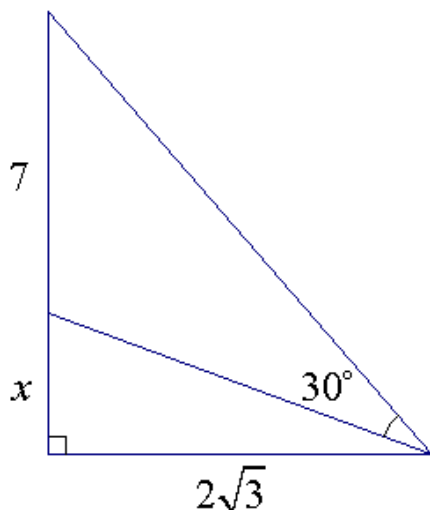
- A)  $3\sqrt{3}$  km/h      B)  $4\sqrt{3}$  km/h      C)  $6\sqrt{3}$  km/h      D)  $8\sqrt{3}$  km/h      E)  $9\sqrt{3}$  km/h

13. En el rectángulo ABCD de la figura,  $BC = 3 ND = 6 BM$ . Además,  $BM = AM$ . Calcula  $\tan \theta$ .



- A)  $\frac{5}{3}$       B)  $\frac{5}{7}$       C)  $\frac{7}{5}$       D)  $\frac{4}{3}$       E) 1

14. Halla el valor de  $x$  en la siguiente figura.



A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

15. Calcula:

$$E = \frac{\frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \binom{18}{5}}{\binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} + \binom{20}{8}}$$

Recuerda que  $\binom{m}{n}$  representa el número de combinaciones de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$ .

A) 2      B) 1      C) -2      D)  $\frac{1}{2}$       E)  $-\frac{1}{2}$

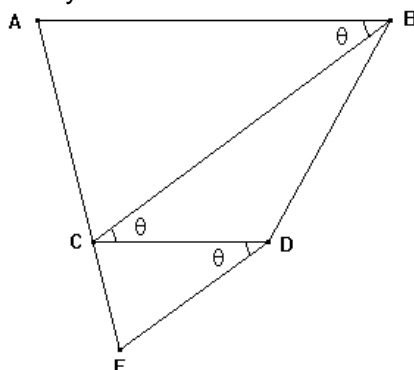
16. ¿Cuál es el menor entero positivo con exactamente 15 divisores? Da como respuesta la suma de sus cifras.

A) 6      B) 7      C) 8      D) 9      E) 10

17. Halla el menor entero positivo  $n$  con la siguiente propiedad: Dados  $n$  enteros positivos distintos cualesquiera, existen dos cuya suma o diferencia es divisible por 10.

A) 4      B) 5      C) 6      D) 7      E) 8

18. Considerando la figura mostrada, determine  $\frac{\text{área}(ACD)}{\text{área}(EBC)}$ , es decir, la razón entre las áreas de los triángulos  $ACD$  y  $EBC$ .

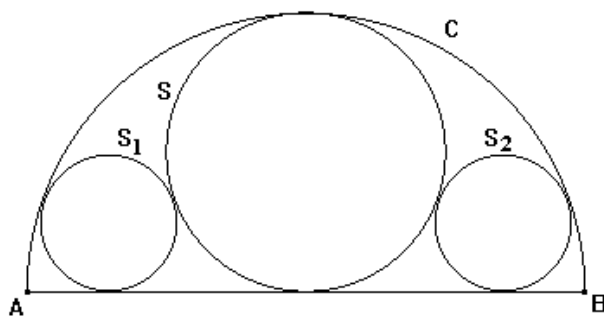


A) 0,5      B) 1      C) 1,5      D) 2      E)  $\text{sen } \theta$

19. La maestra escribe trece números enteros en la pizarra, donde al menos tres de ellos son positivos. Entre los 78 productos dos a dos existen exactamente 22 negativos. ¿Cuántos de los trece números escritos en la pizarra son negativos?

A) 2      B) 10      C) 7      D) 8      E) 9

20. En la figura,  $C$  es una semicircunferencia de diámetro  $AB$ . Las circunferencias  $S, S_1$  y  $S_2$  son tangentes a  $C$  y a  $AB$ ; además  $S$  es tangente a  $S_1$  y  $S_2$ . Si los radios de  $S_1$  y  $S_2$  miden cada uno de ellos 2 unidades, halle la medida del radio de  $S$ .



A) 2      B)  $2\sqrt{2}$       C) 4      D)  $4\sqrt{2}$       E) 8

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

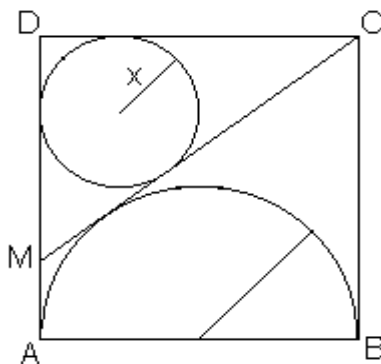
### Segunda Fase – Nivel 3

11 de setiembre de 2004

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

### ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

- Don Pancho es un fabricante de ojotas. En la feria dominical pone a la venta un cierto número de pares de ojotas. Vende inicialmente las dos quintas partes y después el presidente de una comunidad campesina le hace un pedido para sus moradores de las tres cuartas partes de lo que le quedaba. Antes de entregar el pedido, Don Pancho se da cuenta de que 600 pares de ojotas estaban mal hechas y solo puede entregar las ocho novenas partes del pedido. ¿Cuántos pares de ojotas fueron pedidos por el presidente de la comunidad?
- El lado del cuadrado ABCD mide 24 unidades. El segmento CM es tangente a la semicircunferencia de diámetro AB y a la circunferencia pequeña de radio  $x$  unidades. Halla el valor de  $x$ .



- Si  $\theta$  es un ángulo del primer cuadrante tal que  $\tan \theta = \frac{1}{6}$ , halla el valor de la siguiente expresión:

$$\sqrt{37} \left( \sqrt{\frac{\tan \theta + \cot \theta + 2}{\tan \theta + \cot \theta}} - \frac{\cos \theta}{2} \right)$$

- Se tiene un triángulo ABC recto en B. Si sumas las longitudes de los lados  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  y el resultado lo elevas al cuadrado, obtienes nueve veces el producto de las longitudes de dichos lados. Calcula  $\sin A + \csc A$ .

5. Un motociclista entrena para una competencia. El primer día recorre 200 km, el segundo día 280 km, el tercer día 360 km y así sucesivamente, cada día 80 km más que el anterior. Si luego de cierta cantidad de días ha recorrido un total de 4680 km, ¿cuántos días duró su entrenamiento?

6. Juanito está en un helicóptero a 2100 m de altura sobre la superficie de un lago. En un instante, él observa con un ángulo de depresión  $\alpha$  a la lancha de Eduardo y con un ángulo de depresión  $\theta$  a la lancha de Henry. Calcula, en metros, la distancia que separa a las lanchas si se conoce que:

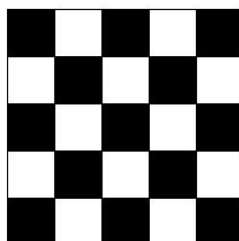
$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \quad \tan \theta = \frac{7}{24}$$

y que la prolongación del segmento que une las dos lanchas pasa por el pie de la perpendicular bajada desde el helicóptero a la superficie del lago.

7. Sea ABC un triángulo equilátero. Se ubican los puntos M, N y P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, de tal modo que  $AP = 2BP$ ,  $BM = 2CM$  y  $CN = 2AN$ . Si el área del triángulo ABC es 126, halla el área del triángulo encerrado por los segmentos AM, BN y CP.

8. Halla el valor de :  $\frac{1}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}$

9. Se ubican 4 fichas en un tablero de 5 x 5 ( mostrado en la figura ) de tal manera que no hay dos o más fichas en una misma fila ni en una misma columna y además las 4 fichas están en casillas de un mismo color ( blanco o negro ). ¿ De cuántas maneras se puede hacer dicha ubicación de fichas (cumpliendo las condiciones detalladas) ? .



10. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica :

$$\cos 12x = 5 \sin 3x + 9(\tan x)^2 + (\cot x)^2.$$

Da como respuesta el número de soluciones en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

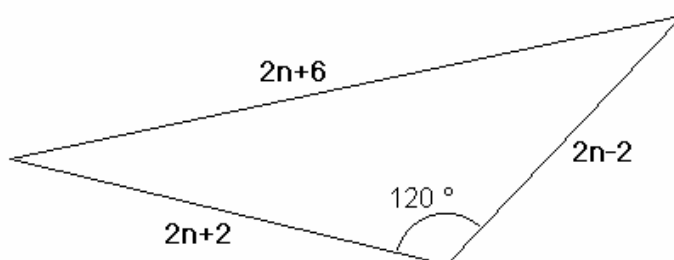
# OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

## Tercera Fase – Nivel 3

16 de octubre de 2004

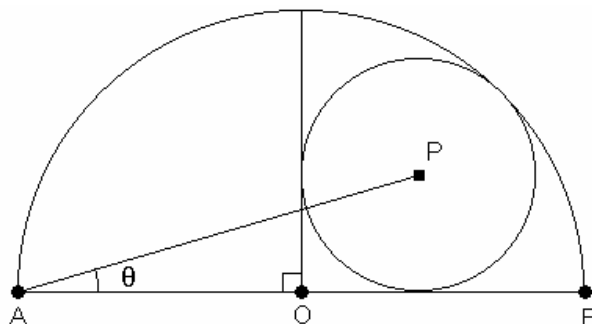
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Ingresas tus respuestas en la computadora tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de recepción de las respuestas.

1. Un agricultor tiene un terreno cuya forma y dimensiones se muestran en la siguiente figura (las longitudes de los lados se encuentran en metros)



Si se sabe que el metro de alambre cuesta S/. 1,50, ¿cuántos soles le costará cercar su terreno con 4 hileras de alambre?

2. En la figura mostrada, O es el centro de la semicircunferencia y P es el centro de la circunferencia inscrita:



Si  $\theta$  es el ángulo que forman el segmento AP con el diámetro AB, calcula:

$$\cot \theta + 2 \tan \theta$$

3. Para cada número real  $\alpha$  y cada entero positivo  $n$  se define:

$$m_n(\alpha) = \sec^{n-1} \alpha - \tan^{n-1} \alpha$$

Si A y B son enteros positivos tales que para todo  $\alpha$  se cumple la siguiente identidad:

$$\frac{m_5(\alpha) - m_3(\alpha)}{m_5(\alpha) + m_3(\alpha)} = (\sec A \alpha)^B,$$

halla A + B.

4. Si  $\theta$  es un ángulo tal que:

$$\frac{\csc \theta - \cot \theta}{\sec \theta - \tan \theta} = 5,$$

calcula el valor de:

$$5 \cot \theta \left( \frac{1 + \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right)$$

5. Dado  $n \geq 3$ , se tienen dos polígonos regulares de  $n$  y  $2n$  lados inscritos en la misma circunferencia de radio  $R$ . Si la suma de sus perímetros está dada por la expresión:

$$kRn \sin \left( \frac{\pi}{2n} \right) \cos^2 \left( \frac{\pi}{4n} \right),$$

halla el valor de  $k$ .

6. Se dice que un conjunto es *aritmético* si tiene exactamente tres elementos y uno de ellos es igual al promedio aritmético de los otros dos. ¿Cuál es el menor entero positivo  $n$  tal que el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  tiene al menos 2004 subconjuntos aritméticos?

7. Sea  $M$  dado por:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \dots + \frac{\sqrt{32(33)}}{65}$$

Entre los enteros positivos que son menores que  $M$ , ¿cuál es el mayor?

8. Halla el valor de :

$$\frac{1}{\tan 9^\circ} \left( \frac{1}{\cot 9^\circ - 3 \tan 9^\circ} + \frac{3}{\cot 27^\circ - 3 \tan 27^\circ} + \frac{9}{\cot 81^\circ - 3 \tan 81^\circ} + \frac{27}{\cot 243^\circ - 3 \tan 243^\circ} \right)$$

9. En un pentágono convexo  $ABCDE$  se sabe que  $AB = 6$ ;  $\angle ADB = 120^\circ$ ;  $\angle AED = 90^\circ$  y  $\angle DCB = 90^\circ$ . La mayor longitud posible de la diagonal  $CE$  es  $m + \sqrt{n}$ , con  $m$  y  $n$  enteros positivos. Halla  $mn$ .

10. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Halla el número de funciones  $f: A \rightarrow A$  que tienen la siguiente propiedad:

No existen tres números distintos  $a, b, c \in A$  tales que  $f(a) = f(b) = f(c)$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

### Cuarta Fase – Nivel 3

13 de noviembre de 2004

- *La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Entrega tu cuadernillo de soluciones justificando adecuadamente todos los pasos.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

### **JUSTIFICA ADECUADAMENTE TODOS LOS PASOS DE TU SOLUCIÓN**

1. Sea  $a$  un número de  $n$  dígitos ( $n > 1$ ). Un número  $b$  de  $2n$  dígitos se obtiene escribiendo dos copias de  $a$  una a continuación de la otra. Si  $\frac{b}{a^2}$  es un número entero  $k$ , encuentra los posibles valores de  $k$ .
  
2. Se tienen 100 monedas aparentemente iguales, donde al menos una de ellas es falsa. Las monedas verdaderas son de igual peso y las monedas falsas también son de igual peso, pero más livianas que las verdaderas. Explica cómo se puede hallar la cantidad de monedas falsas usando una balanza de platillos, a lo más 51 veces.
  
3. Sean  $x, y, z$  números reales positivos, menores que  $\pi$ , tales que:
$$\begin{aligned}\cos x + \cos y + \cos z &= 0 \\ \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z &= 0 \\ \cos 3x + \cos 3y + \cos 3z &= 0.\end{aligned}$$
Halla todos los valores que puede tomar  $\sin x + \sin y + \sin z$ .
  
4. Halla el menor número real  $x$  para el cual existen dos triángulos no congruentes, cuyos lados tienen longitudes enteras y el valor numérico del área de cada triángulo es  $x$ .

**Nota:** Puedes usar la fórmula de Herón para el área  $S$  de un triángulo de lados  $a, b$  y  $c$ :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde  $p$  es el semiperímetro del triángulo, es decir  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

# OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

## Primera Fase – Nivel 3

15 de julio de 2005

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

**MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS**

1. Al convertir  $\frac{16x}{9}\pi$  radianes al sistema sexagesimal se obtiene  $640^\circ$ . Halla el valor de  $x$ .

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 6
- E) 9

2. Simplifica:

$$\left(\left(\frac{2}{4}\right)^{-1}\right)^2 \left(\frac{8}{2}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{4\sqrt{4}}\right)^2.$$

- A) 68
- B) 256
- C) 512
- D) 260
- E) 288

3. Simplifica:

$$M = \left( \left( \frac{\csc 45^\circ}{\tan^2 60^\circ - \frac{1}{\sin 30^\circ}} \right)^{-\sec 60^\circ} \right)^{\cot 45^\circ}.$$

- A)  $\frac{2}{3}$
- B)  $\frac{1}{2}$
- C) 2
- D)  $\frac{5}{2}$
- E)  $\frac{7}{2}$

4. En un triángulo rectángulo  $ABC$  recto en  $A$  de área  $0,5 \text{ m}^2$ , calcula:

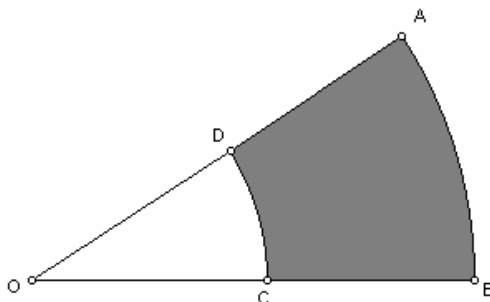
$$\frac{AC^2}{\tan B} + \frac{AB^2}{\tan C}.$$

- A)  $0,5 \text{ m}^2$   
B)  $1 \text{ m}^2$   
C)  $2 \text{ m}^2$   
D)  $3 \text{ m}^2$   
E)  $4 \text{ m}^2$
5. Tomás cosechó 27 500 kg de arroz con cáscara y lo vendió a 0,80 nuevos soles el kilogramo. Julián cosechó igual cantidad de arroz y lo hizo descascarar obteniendo los  $\frac{3}{5}$  del peso original en arroz blanco. Luego, llenó su arroz en sacos de 50 kg y lo vendió cada uno a 80 nuevos soles. ¿Cuánto más o cuánto menos obtuvo de ganancia Julián con respecto a Tomás considerando que el costo por mandar a descascarar cada 100 kg de arroz es 9 nuevos soles, y sin considerar costos a de producción?
- A) S/. 4 400 más  
B) S/. 2 475 más  
C) S/. 1 925 más  
D) S/. 4 400 menos  
E) *Obtuvo la misma ganancia.*
6. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\sin x}{1 - \cot x} + \frac{\cos x}{1 - \tan x}.$$

- A)  $\sin x + \cos x$   
B)  $\sin x - \cos x$   
C)  $\tan x + \cot x$   
D)  $\tan x - \cot x$   
E) 1

7. En la figura mostrada, O es centro de los arcos AB y DC. Calcula el área del trapecio circular sombreado mostrado en la figura, sabiendo que la longitud del arco AB es  $a$ , la longitud del arco DC es  $b$  y la longitud del segmento AD es  $c$ .



- A)  $\frac{c(a+b)}{2}$   
 B)  $\frac{a^2 c}{2(a-b)}$   
 C)  $\frac{c^2 a}{2(a-b)}$   
 D)  $\frac{c(a-b)}{2}$   
 E)  $\frac{abc}{2(a-b)}$
8. Sean P y M los puntos medios de los lados AD y CD, respectivamente, de un cuadrado ABCD. Si  $\alpha$  es el ángulo PBM, calcula el valor de

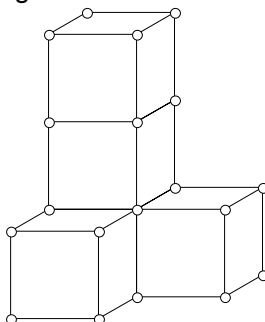
$$36(1 + \cot \alpha).$$

- A) 63  
 B) 84  
 C) 81  
 D) 90  
 E) 96
9. El ángulo  $x$  mide  $15^\circ$  más que el ángulo  $y$ . Si ambos ángulos son agudos y además
- $$\sen 2x \cdot \sec 4y = 1,$$
- calcula la suma de los valores que puede tomar  $y$ .

- A)  $10^\circ$   
 B)  $40^\circ$   
 C)  $60^\circ$   
 D)  $80^\circ$   
 E)  $90^\circ$

10. Una liebre que es perseguida por un perro le lleva de ventaja 90 de sus saltos. La liebre da 5 saltos mientras el perro da 4, pero 7 saltos de la liebre equivalen a 5 saltos del perro. ¿Cuántos saltos tendrá que dar el perro para alcanzar a la liebre?
- A) 200  
B) 300  
C) 500  
D) 600  
E) 900
11. Desde la parte más alta de la Catedral, cuya altura es de 50 metros, se observa la puerta del Concejo Municipal y la Pileta de la Plaza de Armas, ambos ubicados en un mismo plano horizontal. La Pileta, que está al sur de la catedral, es observada con un ángulo de depresión de  $30^\circ$ , mientras que la puerta del Concejo, que se encuentra al este de la Catedral, es observada con un ángulo de depresión de  $60^\circ$ . Calcula la distancia entre la puerta del Concejo Municipal y la Pileta.
- A) 91,3 m  
B) 92,3 m  
C) 90,3 m  
D) 97,3 m  
E) 95,3 m
12. Una semicircunferencia de diámetro AB se divide, mediante 29 puntos, en treinta arcos de igual longitud. Los 29 puntos están numerados en sentido horario con el 1, 2, 3, ..., 29. Calcula la longitud de la proyección, sobre dicho diámetro, del arco comprendido entre los puntos 5 y 10, sabiendo que la longitud de AB es  $2 + 2\sqrt{3}$ .
- A)  $\frac{1}{4}$   
B)  $\frac{1}{2}$   
C) 1  
D)  $\frac{5}{4}$   
E) 2

13. Para pintar un cubo se gasta 5 nuevos soles en pintura. ¿Cuántos nuevos soles se gastará en pintura para pintar cinco cubos del triple de arista que los anteriores si se encuentran pegados formando el sólido mostrado en la figura?



Considera que se debe pintar todas las caras exteriores, incluyendo las caras de la base del sólido.

- A) 105
- B) 145
- C) 135
- D) 145
- E) 165

14. La ecuación en  $x$

$$x^2 - 6x + n^2 = 0$$

tiene dos raíces reales  $a$  y  $b$ . Calcula el valor de la expresión E, donde

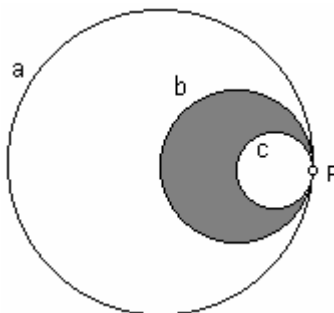
$$E = \log_n a^a + \log_n a^b + \log_n b^a + \log_n b^b.$$

- A) 4
- B) 6
- C) 12
- D) 9
- E) 36

15. El número de cinco dígitos  $\overline{32a1b}$  es múltiplo de 156. Calcula  $ab + a - b$ .

- A) 57
- B) 55
- C) 33
- D) 21
- E) 36

16. Tres circunferencias  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tangentes entre si en el punto  $P$ , como se muestra en la siguiente figura.



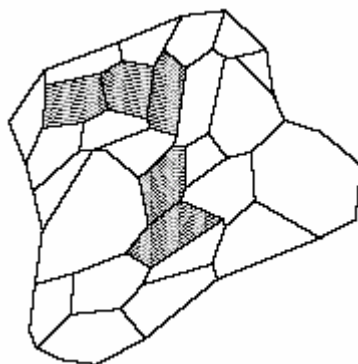
El centro de  $b$  se encuentra sobre  $c$  y el centro de  $a$  se encuentra sobre  $b$ . ¿Cuál es la razón entre el área de la región sombreada y el área total de las regiones no sombreadas limitadas por las circunferencias?

- A)  $\frac{4}{13}$   
 B)  $\frac{1}{4}$   
 C)  $\frac{3}{16}$   
 D)  $\frac{3}{13}$   
 E)  $\frac{1}{8}$
17. Se cortan las esquinas de un cuadrado de papel de lado  $x$  mediante cortes rectos, de tal modo que el pedazo de papel que queda tiene la forma de un octágono regular. Calcula la longitud del lado de este octágono regular.

- A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}x$   
 B)  $2x(2 + \sqrt{2})$   
 C)  $\frac{x}{\sqrt{2} - 1}$   
 D)  $x(\sqrt{2} - 1)$   
 E)  $x(\sqrt{2} + 1)$



18. La isla de Urcos tiene 27 estados, cada uno de los cuales pertenece a uno de dos grupos enemigos entre sí: el gris y el blanco. La Organización de las Naciones Unidas quiere que haya paz en Urcos, para lo cual convertirá cada vez que sea necesario un estado cualquiera al grupo opuesto – esto es, convertirá un estado de blanco a gris o de gris a blanco – hasta conseguir que todos los estados sean del mismo grupo. Al hacer esto, Naciones Unidas debe garantizar que en ningún momento alguno de los estados esté completamente rodeado por estados del grupo opuesto. Observa que un estado de la costa nunca puede estar completamente rodeado, lo cual puede ser aprovechado por las Naciones Unidas para lograr su objetivo. A continuación se muestra un mapa actual de la isla de Urcos.



Los cinco estados sombreados pertenecen al grupo gris y todos los demás al grupo blanco. ¿Con cuántos cambios de grupo, como mínimo, se logra pacificar completamente Urcos?

- A) 5  
B) 7  
C) 9  
D) 10  
E) 12
19. En cierto momento, la población de Uchuaco era un cuadrado perfecto. Tiempo después, con un aumento de 100 habitantes, la población era mayor en 1 que un cuadrado perfecto. Actualmente, con un aumento adicional de 100 habitantes, la población es nuevamente un cuadrado perfecto. La población original de Uchuaco era un múltiplo de
- A) 5  
B) 7  
C) 9  
D) 11  
E) 17

20. Un cubo de un metro de arista es ubicado contra un muro vertical. Una escalera de  $\sqrt{15}$  metros de longitud es apoyada en el muro y toca una de las aristas libres del cubo. ¿Cuántos metros puede alcanzar como máximo, respecto del piso, el extremo superior de la escalera?

A)  $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

B)  $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$

C)  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

D)  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

E)  $\frac{7 + \sqrt{5}}{2}$

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

# OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

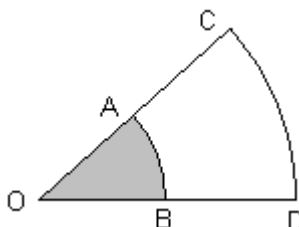
## Segunda Fase – Nivel 3

19 de agosto de 2005

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

### **ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS**

1. En la siguiente figura O es el centro de las circunferencias que contienen a los arcos AB y CD. La longitud del arco AB es 8 unidades, la longitud del arco CD es 12 unidades y la longitud del segmento AC es 4 unidades. Halla el área del sector circular AOB.



2. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos agudos complementarios tales que  $\sec \alpha = m + 1,6$  y  $\csc \beta = 3m - 0,4$ . Calcula  $5 \tan \alpha + 13 \cos \beta$ .

3. Si  $x$  es un ángulo agudo y  $\theta + \phi = 22^\circ 30'$ , calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{1 - \sec(3\theta + \phi + x)}{1 - \csc(\theta + 3\phi - x)} + \frac{1 + \cot(2\theta + 3\phi - x)}{1 + \tan(2\theta + \phi + x)}$$

4. ¿Cuántos metros mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si se sabe que su área es igual a  $18m^2$  y que  $\tan A + \tan C = 4 \cot C \cdot \cot A$ ?

5. Un niño sostiene en una mano dos globos mediante un par de hilos formando un ángulo. El primer globo está orientado hacia el norte y el segundo hacia el sur. El ángulo de elevación del primer globo es de  $21^\circ$  y el hilo que lo sostiene mide  $3\sqrt{5} m$ . El ángulo de elevación del otro globo es de  $24^\circ$  y el hilo que lo sostiene mide  $3\sqrt{10} m$ . ¿Cuál es, en metros, la distancia que hay entre los globos?

6. Dados 7 puntos distintos del plano, se pintan de color rojo los puntos medios de todos los segmentos determinados por estos puntos. Halla la cantidad mínima de puntos rojos.

7. La función  $f$ , definida en los enteros positivos cumple las siguientes propiedades:

- $f(1) = 1$ ,
- $4f(n)f(n+1) = (f(n) + f(n+1) - 1)^2$ , para todo  $n \geq 1$ ,
- $f$  es creciente.

Halla  $f(77)$ .

8. Sean  $x, y$  dos números reales tales que  $\tan^2(x+y) + \cot^2(x+y) = 1 - 2x - x^2$ .

Determina el menor valor positivo de  $y$ . Da como respuesta  $E = \frac{120}{\pi}(1 + \pi - y)$ .

9. En el plano cartesiano, cada punto de coordenadas enteras se denomina *punto entero*.

Sea  $f(n)$  la cantidad de puntos enteros que se encuentran en el segmento que une el origen de coordenadas con el punto entero  $(n, n+3)$  (sin contar los extremos). Halla el valor de

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2005).$$

10. En un círculo de centro  $O$  se trazan dos cuerdas perpendiculares entre sí. La distancia de  $O$  a una de ellas es 9 unidades y de  $O$  a la otra es 5 unidades. Las cuerdas dividen al círculo en cuatro regiones. Considera la suma de las áreas de las regiones de mayor y menor área, y la suma de las áreas de las otras dos regiones. Halla la diferencia entre estas dos sumas.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

# OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

## Tercera Fase – Nivel 3

30 de setiembre de 2005

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Ingresa tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y graba tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.
- La respuesta de cada problema es un **número entero**.

1. Si  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$ , calcula el valor de  $P = 360(\sin \alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos \alpha)$ .
2. En el centro de la cara superior de una caja cúbica de  $512 \text{ cm}^3$  de volumen se pega otra caja cúbica de  $8 \text{ cm}^3$  de volumen. Halla, en  $\text{cm}^2$ , el área total de la superficie del sólido resultante.
3. La expresión  $\frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{\cos x}{|\cos x|}$  toma tres posibles valores  $a$ ,  $b$  y  $c$  ( $a < b < c$ ), cuando  $x$  es un ángulo no cuadrantal. Calcula  $K = 2a + 4b + 6c$ .
4. ¿Para qué valor de  $n$  es válida la siguiente identidad?  

$$(\sin x + \sec x)^2 + 1 + \cos^2 x = 2 + (1 + \tan x)^n$$
5. Dado un triángulo  $ABC$ , donde se cumple que  $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a}{bc}$ , calcula  $\sin A - \cos 2A$ .
6. En un triángulo  $ABC$ , los ángulos  $A$  y  $B$  satisfacen  $3A + 2B = 180^\circ$ . Si el lado  $AB$  mide 8 y el lado  $BC$  mide 4, halla la longitud del lado  $AC$ .
7. En el tablero mostrado, cada una de las casillas blancas contiene un dígito que puede ser 1, 2 ó 3, de tal modo que los números formados por todos los dígitos escritos en casillas adyacentes, leyendo de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo (211, 31, 223, y 11) cumplen las siguientes condiciones:
  - a) Cada número es primo
  - b) Todos los números primos así formados son diferentes.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 |
| 2 |   | 1 |
| 3 | 1 |   |

En las casillas en blanco del siguiente tablero, escribe los dígitos 1, 2 ó 3, de modo que los números de dos o tres dígitos formados como se ilustró en el tablero anterior, cumplan las condiciones (a) y (b).

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

¿Cuál es el mayor valor que puede tener la suma de todos estos números primos?

8. En un triángulo  $ABC$  se cumple que

$$\frac{\tan A}{1} = \frac{\tan B}{2} = \frac{\tan C}{3}.$$

Halla  $720\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$ .

9. Sea  $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}}$ . Halla el entero  $n$  tal que  $n-1 < S < n$ .

10. Hallar de cuántas maneras se pueden elegir subconjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  del conjunto  $\{1,2,3,4\}$ , para que se cumplan simultáneamente las siguientes tres condiciones:

- $A \cap B \cap C = \emptyset$ ,
- $A \cap B \neq \emptyset$ ,
- $A \cap C \neq \emptyset$

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

**¡NO OLVIDES GRABAR TUS RESPUESTAS!**

## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

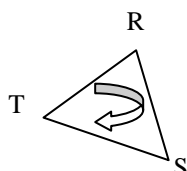
### Cuarta Fase – Nivel 3

19 de noviembre de 2005

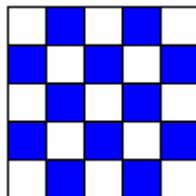
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Cada problema bien resuelto y **debidamente justificado** se calificará con 25 puntos.
- Entrega sólo tu cuadernillo de soluciones.

### JUSTIFICA ADECUADAMENTE TU DESARROLLO

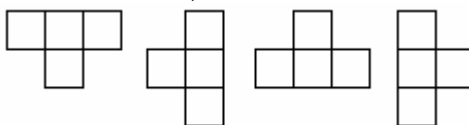
1. Si  $p = (1 - \cos x)(1 + \sin x)$  y  $q = (1 + \cos x)(1 - \sin x)$ , escribe la expresión  $\cos^2 x - \cos^4 x - \sin 2x + 2$  en términos de  $p$  y  $q$ .
2. Las medidas, en grados sexagesimales, de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\theta$  son mayores que 0 y menores que 60. Halla el valor de  $\theta$  sabiendo, además, que  $\alpha + \beta = 2\theta$  y que  $\sin \alpha \sin \beta \sin \theta = \sin(60 - \alpha) \sin(60 - \beta) \sin(60 - \theta)$ .
3. Sean  $A, B, C, D$  cuatro puntos distintos sobre una recta  $\ell$ , de tal modo que  $AB = BC = CD$ . En uno de los semiplanos determinados por la recta  $\ell$ , se eligen los puntos  $P$  y  $Q$  de tal manera que el triángulo CPQ es equilátero con sus vértices nombrados en sentido horario. Sean  $M$  y  $N$  dos puntos del plano tales que los triángulos MAP y NQD son equiláteros (los vértices también están nombrados en sentido horario). Halla el ángulo  $\angle MBN$ .  
*Aclaración:* Los vértices del triángulo equilátero RST que se muestra, están nombrados en el sentido horario



4. En el tablero cuadrilado que se muestra, se coloca una ficha en cada casilla blanca.



Una jugada consiste en elegir cuatro casillas del tablero que forman una "T" en cualquiera de las formas que se muestran a continuación,



y añadir una ficha en cada una de estas cuatro casillas. ¿Será posible, luego de realizar varias jugadas, conseguir que las 25 casillas tengan la misma cantidad de fichas?

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

### Primera Fase – Nivel 3

09 de junio de 2006

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Si  $K = 7 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{4^2}{2^4}$  y  $J = K^{1/2} + (1 - K)^2 + \left(\frac{K}{27}\right)^{-1}$ , el valor de  $J + K$  es:  
 A) 74                      B) 76                      C) 77                      D) 78                      E) 79
2. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo recto en  $C$ . Calcula:  

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} 45^\circ}{\cos A + \cos B + \cos 45^\circ}$$
  
 A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B) 1                      C) 2                      D)  $\sqrt{2}$                       E)  $\frac{1}{2}$
3. Una escalera recta apoyada en una planta vertical de coco forma un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal del suelo. La escalera mide 4 metros de largo y se verifica que del extremo superior de la escalera aún faltan 3 metros para llegar al primer fruto de coco. La distancia que hay desde el suelo hasta el punto donde se encuentra el primer coco es  
 A) mayor que 9 metros  
 B) mayor que 8 metros y menor que 9 metros  
 C) mayor que 7 metros y menor que 8 metros  
 D) mayor que 6 metros y menor que 7 metros  
 E) mayor que 5 metros y menor que 6 metros.
4. Las longitudes de los lados de un rectángulo de área  $108 \text{ m}^2$  se diferencian en 3 metros. Halla la menor razón trigonométrica del ángulo formado por la diagonal y uno de los lados.  
 A)  $\frac{1}{3}$                       B)  $\frac{3}{5}$                       C)  $\frac{2}{3}$                       D)  $\frac{1}{4}$                       E)  $\frac{1}{5}$
5. Se sabe que  $x \operatorname{sen} A + y \cos A = x$ ; ( $x \neq \pm y$ )  
 Halla  $\operatorname{cosec} A$  en función de  $x$  e  $y$ , asumiendo que  $0^\circ < A < 90^\circ$ .  
 A)  $\frac{x+y}{x-y}$                       B)  $\frac{x-y}{x+y}$                       C)  $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$                       D)  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$                       E)  $\frac{x^2}{y^2}$

6. En un triángulo rectángulo las medidas de las longitudes de sus lados son 8,  $x + 5$  y  $x + 7$ . Halla el seno del mayor de los ángulos agudos del triángulo, si  $x > 3$ .
- A)  $\frac{3}{5}$       B)  $\frac{8}{17}$       C)  $\frac{15}{17}$       D)  $\frac{2}{3}$       E)  $\frac{4}{5}$
7. Un padre brasileño, emocionado por el mundial, decide darle una propina a su hijo. Por el total de goles que meta cada jugador de la selección brasileña le dará en dólares el equivalente al cuadrado de esos números. Si se sabe que solo metieron goles Ronaldhino, Ronaldo y Kaká, que anotaron en total 13 goles y que su hijo recibió 57 dólares en total. ¿Cuántos goles anotó Ronaldhino, si fue el que más goles anotó?
- A) 4      B) 3      C) 5      D) 6      E) 7
8. La expresión  $x \# y$  sólo es válida si  $x = 2m^n$ ,  $y = 3n^m$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos con  $n \neq 1$ . Si se define  $x \# y = \sqrt{m^2 + n^2}$ , halla el máximo valor que puede tomar la expresión  $128 \# y$ .
- A) 5      B)  $2\sqrt{17}$       C)  $2\sqrt{10}$       D)  $\sqrt{4097}$       E) 768
9. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos agudos y  $\alpha > \beta$ , entonces
- A)  $\sin(\alpha - \beta) > \sin \alpha - \sin \beta$   
 B)  $\sin(\alpha - \beta) < \sin \alpha - \sin \beta$   
 C)  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha - \sin \beta$   
 D)  $\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha - \sin \beta$   
 E)  $\sin(\alpha - \beta) < \cos \alpha - \cos \beta$
10. Halla la suma de las soluciones de la ecuación  $2(\sin x + \cos x)^2 = 2 + \sqrt{3}$ , siendo  $x$  un ángulo agudo.
- A)  $90^\circ$       B)  $180^\circ$       C)  $270^\circ$       D)  $360^\circ$       E) No hay solución
11. Se tiene un cuadrado  $ABCD$ . Se ubica el punto  $M$  en  $CD$  tal que  $DM = 2MC$ . Sea  $F$  el punto de intersección de  $BD$  y  $MA$ . La recta  $CF$  interseca a  $AD$  en  $N$ . Calcula  $\frac{AN}{ND}$ .
- A) 4      B) 0.5      C) 0.2      D) 0.25      E) 2
12.  $ABCD$  es un cuadrilátero con  $AB = 8$ ,  $BC = 6$ ,  $BD = 10$ ,  $\angle DAB = \angle CDA$  y  $\angle ABD = \angle BCD$ . Hallar  $CD$ .
- A) 10      B) 12      C)  $\frac{25}{2}$       D)  $\frac{64}{5}$       E) 16
13. En un triángulo rectángulo  $ABC$  recto en  $B$ , se ubican los puntos  $N$  y  $M$  en  $CB$  y  $AB$ , respectivamente, de modo que  $CN = 6$ ,  $NB = 4$  y  $AM - MB = 1$ . Si  $O$  es el punto de intersección de las rectas  $AN$  y  $MC$ ; y los triángulos  $AOM$  y  $CON$  tienen igual área, calcula la tangente del ángulo  $OMB$ .
- A) 1      B)  $\frac{1}{5}$       C) 5      D)  $\frac{1}{3}$       E) 3

14. ABC es un triángulo con  $AB = 9$ ,  $BC = 15$  y  $CA = 16$ . D es un punto de AC tal que la medida del ángulo ABD es el doble de la medida del ángulo DBC. Halla el coseno del ángulo ADB.

- A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C)  $\frac{4}{5}$       D)  $\frac{3}{5}$       E)  $\frac{1}{2}$

15. Los enteros positivos A, B, C y D satisfacen  $A^5 = B^4$ ,  $C^3 = D^2$  y  $C = A + 19$ . Encontrar  $D - B$ .

- A) 757      B) 697      C) 728      D) 968      E) 657

16. Sean  $a, b, c, d$  números reales cuya suma es cero y sean

$$E = \frac{a^2}{(a+2b)} + \frac{b^2}{(b+2c)} + \frac{c^2}{(c+2d)} + \frac{d^2}{(d+2a)}$$

$$F = \frac{b^2}{(a+2b)} + \frac{c^2}{(b+2c)} + \frac{d^2}{(c+2d)} + \frac{a^2}{(d+2a)}$$

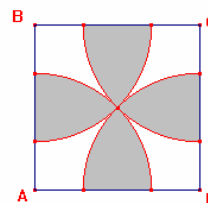
Halla la cantidad de valores enteros que toma  $\frac{E}{F}$ .

- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4

17. Sea ABC un triángulo isósceles con  $AB = AC = 5$  y  $BC = 6$ . El punto D está en AC y P es un punto en BD tal que  $\angle APC = 90^\circ$ . Si  $\angle ABP = \angle BCP$ , calcula  $\frac{AD}{DC}$ .

- A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$       D)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       E) 1

18. En el cuadrado ABCD de lado  $4\sqrt{2}$ , la región sombreada está limitada por arcos de circunferencias con centros en los vértices del cuadrado, como se muestra en la figura:  
Calcula el área de la región sombreada.



- A)  $16(\pi - 2)$       B)  $4(\pi - 1)$       C)  $8(\pi - 2)$       D)  $2(\pi - 2)$       E)  $12(\pi - 2)$

19. En un triángulo se cumple: sus alturas están en progresión geométrica y sus lados en progresión aritmética. Calcula la suma del mayor y menor ángulo de dicho triángulo.

- A)  $127^\circ$       B)  $90^\circ$       C)  $135^\circ$       D)  $120^\circ$       E)  $150^\circ$

20. En un tablero de  $5 \times 5$ , ¿de cuántas maneras se pueden colocar tres fichas idénticas, cada una en el centro de una casilla, de tal modo que formen un triángulo rectángulo con catetos paralelos a los lados del tablero?

- A) 25      B) 100      C) 400      D) 625      E) 16

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

# OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

## Segunda Fase – Nivel 3

18 de agosto de 2006

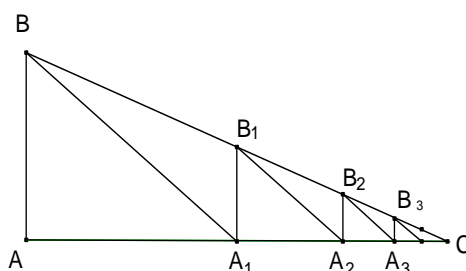
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

### ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

### EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

- Halla el valor de :  $2(\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 90^\circ)$ .
- En un triángulo rectángulo ABC con catetos AB=20 y AC=21, los puntos D y E pertenecen a la hipotenusa, siendo BD=8 y EC=9. Calcula, en grados sexagesimales, la medida del ángulo DAE.
- Si  $\sin \theta + 2 \tan \theta = 5$ , halla el valor de  $(2 \sec \theta + 1)^2 - (\cos \theta + 2)^2$ .
- Si  $(1 + \sec x)(1 + \csc x) = \frac{20}{3}$ , halla  $100(\sec x - 1)(\csc x - 1)$ .
- En el diagrama, ABC es un triángulo rectángulo con catetos AB=3 y AC=8. A<sub>1</sub> es punto medio de AC y los segmentos BA<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>A<sub>3</sub>, ..., B<sub>8</sub>A<sub>9</sub> son paralelos entre sí. Además los segmentos A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>, ..., A<sub>9</sub>B<sub>9</sub> son perpendiculares a AC. Encuentra el valor de:

$$2^9 (BA_1 + B_1A_2 + B_2A_3 + \dots + B_8A_9)$$



- Si  $1+3+5+7+ \dots +(2n+1) = 6+8+10+ \dots +2m$  siendo  $m$  y  $n$  **enteros positivos**, halla  $m+n$ .
- Dada  $f(x) = \frac{\sin(2x) + 2}{\sin(x) + \cos(x)}$ , sean M y m el mayor y el menor valor de  $f(x)$ , respectivamente. Calcula  $(M+m)^2$ .

8. ¿Cuántos números de siete cifras cumplen simultáneamente las siguientes tres condiciones?
- a) Todas sus cifras son diferentes.
  - b) Sus cifras pertenecen al conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .
  - c) El número es múltiplo de 11.

9. ¿Cuál es el mayor **entero positivo** par que **no** puede expresarse como la suma de dos números impares compuestos?

**Nota.-** Un número es compuesto si es mayor que 1 y no es primo.

10. Si en un triángulo  $ABC$  se cumple que  $AB = 9$  y  $\frac{BC}{CA} = \frac{40}{41}$ , ¿cuál es el mayor valor posible del área del triángulo  $ABC$ ?

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

### Tercera Fase – Nivel 3

6 de octubre de 2006

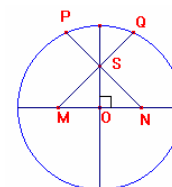
- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Ingresa tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y graba tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.*

### EN TODOS LOS CASOS LA RESPUESTA CORRECTA ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

1. Luis piensa en un ángulo agudo, lo divide entre 2, calcula el coseno del cociente, eleva al cuadrado el resultado y finalmente lo multiplica por 8. Si la respuesta final es 6, ¿cuántos grados sexagesimales mide el ángulo que pensó Luis?
2. N es un número de 21 dígitos, donde todos son iguales a 1 excepto el dígito central. Si N es múltiplo de 7, ¿cuál es el dígito central?
3. En una mueblería sólo se producen mesas y escritorios. Para producir cada mesa se requiere de 1 hora de trabajo, y para producir cada escritorio se necesitan 2 horas de trabajo. La mueblería dispone de, a lo más, 16 horas de trabajo y sabe que vendería como máximo 10 mesas y 7 escritorios. Si por cada mesa gana 30 soles y por cada escritorio gana 90 soles, ¿cuál es la mayor ganancia que puede obtener?
4. ¿Para cuántos valores enteros de  $a$  la siguiente ecuación, en la variable  $x$ , tiene soluciones reales ?  

$$\sin^4 x - 2 \cos^2 x + a^2 = 0$$
5. Desde un punto P, exterior a una circunferencia C, se traza la tangente PT y la secante PAB, con A y B en la circunferencia, estando A entre P y B. Si TA es bisectriz del ángulo BTP,  $BT = 15$  y  $AT = 10$ , calcula PT.
6. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen la propiedad que la suma de la cifra de las centenas con la cifra de las decenas es igual a la cifra de los millares?

7. En la gráfica, los puntos M, N y S son puntos medios de los radios de la circunferencia con centro O y la medida del arco PQ es  $2\theta$ .  
 Calcula  $3(\tan \theta + \cot \theta)$



8. Un profesor escribe en la pizarra los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y les dice a sus alumnos: "Deben borrar dos dígitos y los 7 restantes deben ordenarlos adecuadamente para formar un número de 7 dígitos distintos que sea múltiplo de cada uno de sus dígitos". De los dos dígitos que deben ser borrados para resolver el problema, ¿cuál es el mayor?
9. Se tienen 40 puntos en el plano, donde no hay tres colineales. A cada punto se le asigna un número del 1 al 40 sin repetición. Luego se une cada par de puntos mediante segmentos de recta de colores azul, rojo o verde, de acuerdo a las siguientes condiciones:
  - Si la suma de los números asignados a los puntos es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color azul.
  - Si la suma de los números asignados a los puntos disminuida en 1 es un múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color rojo.
  - Si la suma de los números asignados a los puntos disminuida en 2 es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color verde.
 ¿Cuántos triángulos se han formado con sus tres lados de colores distintos?



MINISTERIO DE EDUCACION



SOCIEDAD MATEMATICA PERUANA

10. En un triángulo  $ABC$  se trazan las bisectrices  $BD$  y  $CE$  ( $D$  en  $AC$  y  $E$  en  $AB$ ). Si la medida en grados sexagesimales del ángulo  $BDE$  es  $24$  y la medida en grados sexagesimales del ángulo  $CED$  es  $18$ , ¿cuántos grados sexagesimales mide el ángulo  $ABC$ ?

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

### Cuarta Fase – Nivel 3

25 de noviembre de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Entrega tu cuadernillo de soluciones **justificando** adecuadamente todos los pasos.*
- *Puedes llevarte las hojas con los enunciados de los problemas.*

### **JUSTIFICA ADECUADAMENTE TODOS LOS PASOS DE TUS SOLUCIONES**

1. Halla todos los valores enteros positivos que puede tomar  $n$  tal que  
$$\cos(2x) = \cos^n x - \sin^n x$$
para todo número real  $x$ .
2. Halla todos los valores de  $k$  para los cuales es posible dividir cualquier región triangular en  $k$  cuadriláteros de igual área.
3. Un par  $(m, n)$  de enteros positivos se denomina “enlazado” si  $m$  divide a  $3n + 1$  y  $n$  divide a  $3m + 1$ . Si  $a, b, c$  son enteros positivos distintos tales que  $(a, b)$  y  $(b, c)$  son pares enlazados, demuestra que el número 1 pertenece al conjunto  $\{a, b, c\}$ .
4. En cada una de las casillas de un tablero de  $n \times n$ , con  $n \geq 3$ , se escribe un número entero positivo de tal modo que el valor absoluto de la diferencia de los números escritos en dos casillas vecinas cualesquiera es menor o igual que 2 (dos casillas vecinas son aquellas que tienen un lado común).
  - a) Muestra un tablero de  $5 \times 5$  en el cual se hayan escrito 15 números enteros distintos siguiendo la regla indicada.
  - b) Halla, en función de  $n$ , la máxima cantidad de números distintos que puede tener el tablero de  $n \times n$  casillas.

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

13 de julio del 2007

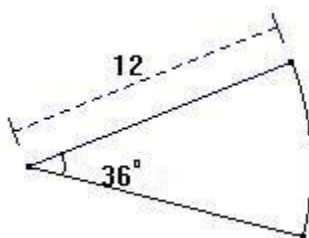
- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Calcula el valor de

$$\frac{2^n \times 6^{n+3}}{3^{n+1} \times 4^n}$$

- A) 144                      B) 48                      C) 108                      D) 36                      E) 72
2. Se desea disminuir el ángulo del siguiente sector circular en  $27^\circ$ :



- ¿Cuál debe ser el nuevo radio para que el área no varíe?
- A) 18                      B) 16                      C) 24                      D) 36                      E) 28
3. En un colegio hay 5 salones de primer grado y las cantidades de alumnos que hay en cada salón pueden ponerse en progresión aritmética. El salón menos numeroso tiene 30 alumnos y en el primer grado hay 170 alumnos en total. Halla la cantidad de alumnos del salón más numeroso.
- A) 34                      B) 38                      C) 42                      D) 44                      E) 46



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

4. Se tiene una caja de zapatos de caras rectangulares, tres de las cuales tienen las siguientes áreas:  $192 \text{ cm}^2$ ,  $336 \text{ cm}^2$  y  $252 \text{ cm}^2$ . Halla la distancia entre dos vértices de la caja que no están en una misma cara.

A)  $20 \text{ cm}$       B)  $3\sqrt{69} \text{ cm}$       C)  $\sqrt{697} \text{ cm}$       D)  $36 \text{ cm}$       E)  $29 \text{ cm}$

5. ¿Para qué valor de  $M$  la siguiente expresión es constante (es decir, no depende de  $x$ )?:

$$\sin^4 x (1 - M \sin^2 x) + \cos^4 x (1 - M \cos^2 x)$$

A)  $\frac{2}{3}$       B) 1      C)  $\frac{3}{2}$       D) -1      E) 0

6. En un triángulo rectángulo  $ABC$ , recto en  $C$ , se cumple que

$$6 \cos^3 A = \frac{\sin A + \sin B}{\tan A + \tan B}$$

Calcula  $\tan A$ .

A) 2      B) 3      C)  $\frac{1}{3}$       D) 1      E)  $\frac{1}{2}$

7. Una empresa de transportes ofrece asientos para fumadores al precio de S/.600 y para no fumadores al precio de S/.100. Al no fumador se le permite llevar 20 kg de peso y al fumador 50 kg. Si el ómnibus de la empresa tiene 90 asientos y admite un equipaje de hasta 3000 kg. ¿En cuál de los siguientes casos la empresa obtiene el máximo ingreso?

- A) 60 no fumadores y 0 fumadores  
B) 40 no fumadores y 50 fumadores  
C) 50 no fumadores y 40 fumadores  
D) 0 no fumadores y 90 fumadores  
E) 0 no fumadores y 60 fumadores

8. Si  $a$  es un entero positivo tal que  $2x + a = y$ ,  $a + y = x$ ,  $x + y = z$ . Halla el máximo valor de  $x + y + z$ .

A) -1      B) -10      C) 0      D) 1      E) 10



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

9. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  ángulos agudos tales que:

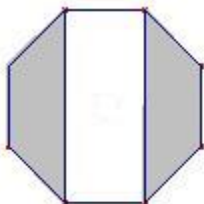
$$\sqrt{7} \operatorname{tg} \alpha = 5 \operatorname{tg} \beta$$

$$4 \operatorname{sen} \alpha = 5 \operatorname{sen} \beta$$

Halla  $\operatorname{csc} \beta$ .

- A)  $\frac{5\sqrt{7}}{4}$       B)  $\frac{5}{4}$       C)  $\frac{4\sqrt{2}}{5}$       D) 2      E)  $\sqrt{2}$

10. Cada uno de los lados de un octágono regular mide 2 cm. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la región sombreada y la región sin sombreadar?



- A)  $\sqrt{2} \text{ cm}^2$       B)  $0 \text{ cm}^2$       C)  $2 \text{ cm}^2$       D)  $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$       E)  $(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2$

11. En el instante que un avión sobrevuela a  $560 \text{ km/h}$  la ciudad de Trujillo, un ómnibus, ubicado en el pie de la vertical trazada desde el avión, sale de esta ciudad a  $80 \text{ km/h}$  en la misma dirección del avión. A las  $10 : 20 \text{ a.m.}$  el chofer ve al avión con un ángulo de elevación  $\alpha$ , y a las  $10 : 26 \text{ a.m.}$  con un ángulo  $\beta$ . Si el avión vuela a altura constante de  $6 \text{ km}$ , halla

$$\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha$$

- A) 8      B) 9      C) 10      D) 11      E) 12

12. Las longitudes de los lados de un triángulo  $ABC$  son  $AB = 7$ ,  $BC = 9$  y  $AC = 12$ .  $L_1$  es la bisectriz interior del ángulo  $A$  y  $L_2$  la bisectriz exterior del ángulo  $C$ .  $M$  y  $N$  son los pies de las perpendiculares trazadas desde  $B$  a  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente. Calcula la longitud de  $MN$ .

- A) 2      B) 5      C) 7      D) 8      E) 14

13. Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 20 y 21. Se construye una semicircunferencia que tiene su diámetro sobre el cateto de longitud 20 y es tangente a los otros dos lados del triángulo. Calcula el radio de la semicircunferencia.

- A) 4,2      B) 8,4      C) 2,1      D) 3,5      E) 9,1



Primera Fase - Nivel 3

14. Si multiplicamos todos los números naturales que no son múltiplos de 5 y son menores que 2008, ¿cuál es la cifra de las unidades del producto obtenido?  
A) 2                      B) 4                      C) 6                      D) 8                      E) 7
15. El primer término de una progresión aritmética es  $\frac{1}{8}$  y el segundo es  $\frac{1}{5}$ . Un alumno notó que en esta progresión hay varios términos que son enteros. ¿Cuál es el segundo menor de estos enteros?  
A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5
16. En un cuadrado  $ABCD$ ,  $M$  y  $N$  son puntos de  $CD$  y  $BC$  respectivamente y  $Q$  es un punto del segmento  $AM$ . Si el ángulo  $\angle NQM$  mide  $90^\circ$ ,  $QM = 1$ ,  $QN = 2$  y  $AM = 4$ , calcula la tangente del ángulo  $\angle AMD$ .  
A)  $\frac{2}{3}$                       B)  $\frac{4}{3}$                       C) 2                      D)  $\frac{3}{4}$                       E)  $\frac{3}{2}$
17. Calcula el valor numérico de:  
$$\frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)} + \frac{(1+ba)(1+bc)}{(b-a)(c-b)} + \frac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(b-c)}$$
cuando  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{3}$  y  $c = \sqrt{5}$ .  
A) -14                      B)  $\sqrt{30}$                       C) 0                      D) 1                      E)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$
18. Se tiene 6 números naturales no necesariamente distintos, tales que la suma de dos cualesquiera de ellos es un número compuesto. ¿Cuál es el menor valor impar que puede tomar la suma de estos números?  
A) 21                      B) 13                      C) 15                      D) 17                      E) 19
19. Un número natural se denomina *actual* si cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto  $\{0, 2, 7\}$  y es múltiplo de 3. Por ejemplo 2007 es actual. ¿Cuántos números actuales son menores que 1000000 ?  
A) 162                      B) 242                      C) 243                      D) 728                      E) 729
20. En una fila escribimos los números del 1 al 24 inclusive en algún orden, de tal forma que si  $m$  divide a  $n$  entonces el término de lugar  $m$  divide al término de lugar  $n$ . ¿De cuántas formas distintas podemos hacer esto?  
A) 6                      B) 24                      C) 1                      D) 48                      E) 120

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática  
Peruana

Segunda Fase - Nivel 3

14 de septiembre del 2007

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. ¿Cuál es el menor número natural múltiplo de 4 tal que la suma de sus dígitos es 29?
2. En un examen de 120 preguntas, se califica con 3 puntos cada respuesta correcta y con  $-1$  cada respuesta incorrecta. El número de aciertos de Andrés es igual al número de desaciertos de Benito y el número de aciertos de Benito es igual al número de desaciertos de Andrés. Si ambos contestaron todas las preguntas y Andrés obtuvo el doble del puntaje de Benito, ¿qué puntaje obtuvo Benito?
3. Sea  $x$  el ángulo agudo tal que  $\csc x + \cot x = \sqrt{3}$ . Halla  $\sec^2 x$ .
4. Una máquina arroja monedas de un nuevo sol. Tres amigos A, B y C deciden desarrollar un juego con la máquina del siguiente modo: A usa primero la máquina, luego B y a continuación C y nuevamente A y así sucesivamente. La primera vez, la máquina arroja una moneda y cada vez que se vuelve a utilizar, arroja una moneda más que la vez anterior. La máquina se detuvo cuando los tres amigos obtuvieron en total 1035 nuevos soles. ¿Cuántos nuevos soles obtuvo el que sacó más monedas?
5. Sea  $ABC$  un triángulo tal que:  $\angle ABC = 3(\angle ACB)$  y  $AC = 2AB$ . Halla la medida del ángulo  $\angle CAB$ .
6. En un triángulo  $ABC$  se cumple que  $\cot A - \cot B = 2$  y  $3\tan A + \tan B = -2$ . Calcula  $3\tan C$ .



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática  
Peruana

Segunda Fase - Nivel 3

14 de septiembre del 2007

- 
7. Un subconjunto  $M$  de  $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$  tiene la propiedad que el producto de todos sus elementos es un cuadrado perfecto, ¿cuántos elementos como máximo puede tener  $M$ ?
8. En un triángulo  $ABC$  se tiene que  $\angle BAC = 2(\angle ACB)$ . Se traza el segmento  $\overline{BD}$ , con  $D$  en  $\overline{AC}$ , de modo que  $\angle DBA = 2(\angle BAD)$ . Si además  $DC = 2(BD) + AD$ , calcula el ángulo  $\angle ACB$ .
9. Sea  $k$  un número natural que tiene tres divisores y  $n$  un número natural que tiene 30 divisores. Si

$$k^2 + n^2 = r^2,$$

siendo  $r$  un número natural, halla la suma de todos los posibles valores de  $k$ .

10. Sea  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .  
Una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es *idempotente* si  $f(f(x)) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{A}$ .  
Por ejemplo la función  $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  definida por

$$g(1) = 3, \quad g(2) = 5, \quad g(3) = 3, \quad g(4) = 4, \quad g(5) = 5$$

es idempotente.

¿Cuántas funciones  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  son idempotentes?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática  
Peruana

Tercera fase - Nivel 3

06 de noviembre del 2007

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Ingresa tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y graba tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

EN TODOS LOS CASOS LA RESPUESTA ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo recto en  $B$  y de perímetro 70. Si  $\tan A + \sec A = \frac{5}{2}$ , halla  $AB$ .
2. Un campesino tiene  $\overline{aab3}$  nuevos soles. Si compra una vaca se queda con 1500 nuevos soles, pero si compra dos vacas se queda con  $\overline{bab}$  nuevos soles. ¿Cuántos nuevos soles cuesta cada vaca?
3. ¿Cuántos números que tienen todas sus cifras pares hay entre 2007 y 7002? (recuerda que el cero es par).
4. Un número natural no es mayor que 90, no es menor que 30, no es cuadrado perfecto, no es par, no es primo, no es divisible por 3 y el dígito de las unidades no es 5. ¿Cuál es ese número?
5. Sea  $x$  la medida, en grados sexagesimales, de un ángulo agudo que cumple

$$\text{Sen}(6x) = 2 \text{Sen}^2(12x) + 1$$

Halla la suma de todos los posibles valores de  $x$ .

6. En un rectángulo  $ABCD$  se ubica el punto  $E$  en  $AD$  de manera que  $\angle CED = 3 \angle BEA$  y  $BE - EC = 2 AB$ . Halla  $\angle BEC$ .
-





Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática  
Peruana

7. Sea  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \dots, 2007\}$  el conjunto formado por los 2007 primeros números naturales.  $\mathcal{B}$  es un subconjunto de  $\mathcal{A}$  que tiene las siguientes propiedades

- La suma de dos elementos cualesquiera de  $\mathcal{B}$  nunca es 2008.
- La diferencia de dos elementos cualesquiera de  $\mathcal{B}$  nunca es 2

¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puede tener  $\mathcal{B}$ ?

8. En un triángulo  $ABC$ , ¿Cuál es el menor valor entero que puede tomar

$$\frac{5 \cot C + 4 \cot A + \cot B}{\csc C} ?$$

9. En cada casilla de un tablero de  $6 \times 6$  se escribe un número real de tal manera que se cumpla la siguiente condición: para cada casilla, la suma de los números escritos en sus casillas vecinas es siempre 1.

Halla la suma de todos los números escritos en el tablero.

**Nota.-** Dos casillas son vecinas si tienen un lado común.

10. Un polinomio  $P(x)$  de grado 9 tiene la propiedad

$$P(k) = \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, 10$$

El valor de  $P(11)$  puede ser escrito como  $-\frac{m}{n}$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos y el  $MCD(m, n) = 1$ . Halla  $m + n$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Ministerio  
de Educación

# OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2007)



Sociedad Matemática  
Peruana

Cuarta fase - Nivel 3

02 de diciembre del 2007

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Entrega tu cuadernillo de soluciones justificando adecuadamente todos los pasos.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

**Problema 1.-** Halla todos los valores de  $A$ , tales que  $0^\circ < A < 360^\circ$  y además:

$$\frac{\operatorname{Sen} A}{\operatorname{Cos} A - 1} \geq 1 \quad \text{y} \quad \frac{3 \operatorname{Cos} A - 1}{\operatorname{Sen} A} \geq 1$$

**Problema 2.-** Asumiendo que cada punto de una recta está pintado de rojo o de azul, de manera arbitraria, demuestra que siempre es posible elegir tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  en tal recta, que esten pintados del mismo color y que se cumpla:

$$\frac{AB}{1} = \frac{BC}{2} = \frac{AC}{3}.$$

**Problema 3.-** Decimos que un número natural de al menos dos dígitos  $E$  es *especial* si cada vez que se suman dos dígitos adyacentes de  $E$  se obtiene un divisor de  $E$ . Por ejemplo, 2124 es especial, pues los números  $2 + 1$ ,  $1 + 2$  y  $2 + 4$  son todos divisores de 2124. Halla el mayor valor de  $n$  para el cual existen  $n$  números naturales consecutivos tales que todos ellos son especiales.

**Problema 4.-** Se tiene un rombo  $ABCD$  donde los triángulos  $ABD$  y  $BCD$  son equiláteros. Sean  $M$  y  $N$  puntos de los lados  $BC$  y  $CD$ , respectivamente, tales que  $m\angle MAN = 30^\circ$ . Sea  $X$  el punto de intersección de las diagonales  $AC$  y  $BD$ . Prueba que  $m\angle XMN = m\angle DAM$  y  $m\angle XNM = m\angle BAN$ .

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

20 de junio del 2008

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Se sabe que  $N$  grados sexagesimales equivalen a  $(N+10)$  grados centesimales. ¿Cuántos grados sexagesimales equivalen a  $\frac{N\pi}{15}$  radianes ?  
A) 540                      B) 720                      C) 900                      D) 1080                      E) 1620
2. A un alambre de 26 m se le dio 3 cortes, uno después de otro, de manera que la longitud de cada trozo resultante (a partir del segundo trozo) sea igual al del inmediato anterior aumentado en su mitad. ¿Cuántos centímetros mide el trozo de menor longitud?  
A) 320                      B) 32                      C) 100                      D) 260                      E) 26
3. Definimos el operador  $\Delta$  de la siguiente forma:

$$x\Delta y = x^2 + y,$$

Si  $r_1$  y  $r_2$ , con  $r_1 < r_2$ , son las raíces de la ecuación

$$(2x)\Delta 1 + 1\Delta(2x) = x\Delta 2,$$

halla el valor de  $r_2 - 6r_1$ .

- A) 9                      B) -4                      C) 4                      D)  $-\frac{2}{3}$                       E)  $-\frac{3}{2}$
4. En un triángulo rectángulo  $ABC$ , recto en  $C$ , se cumple que

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} 45^\circ.$$

Calcula  $2\tan^2 A + \sec^2 A$ .

- A)  $\frac{11}{3}$                       B) 4                      C) 3                      D) 2                      E)  $\frac{7}{4}$



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

5. Se tiene un sector circular cuyo ángulo central mide  $72^\circ$ . Si el radio disminuye el 25 %, ¿cuántos grados sexagesimales hay que aumentar al ángulo central de dicho sector para que el área no varíe?  
A)  $90^\circ$                       B)  $72^\circ$                       C)  $36^\circ$                       D)  $40^\circ$                       E)  $56^\circ$
6. En el triángulo  $ABC$  la bisectriz del ángulo  $\angle ABC$  interseca al lado  $AC$  en el punto  $D$ , la bisectriz del ángulo  $\angle BDC$  interseca al lado  $BC$  en el punto  $E$ . Si la bisectriz del ángulo  $\angle BED$  es perpendicular al lado  $AB$ , y además  $\angle ACB = 26^\circ$ , calcula  $\angle ADE$ .  
A)  $66^\circ$                       B)  $114^\circ$                       C)  $77^\circ$                       D)  $103^\circ$                       E)  $11^\circ$ .
7. Las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) para medir temperaturas, están relacionadas por una función cuya gráfica es una recta. Si  $0^\circ\text{C}$  equivale a  $32^\circ\text{F}$  y  $100^\circ\text{C}$  equivale a  $212^\circ\text{F}$ , ¿a cuántas grados Celsius equivale 86 grados Fahrenheit?  
A) 36                      B) 40                      C) 24                      D) 25                      E) 30
8. Tres ángulos al ser expresados en grados sexagesimales miden  $S_1, S_2, S_3$  y al ser expresados en grados centesimales miden  $C_1, C_2, C_3$ , respectivamente. Se sabe que  $S_1, S_2, S_3$  forman una progresión aritmética (en ese orden) de razón 18 y que  $4C_3 = 3(C_1 + C_2)$ . Calcula  $S_2 + C_2$ .  
A) 76                      B) 95                      C) 114                      D) 133                      E) 152
9. Sea  $P$  un punto interior de un cuadrado  $ABCD$ . Si las áreas de los triángulos  $PDA$  y  $PBC$  son 4 y 6, respectivamente, calcula la longitud de la diagonal del cuadrado.  
A)  $2\sqrt{5}$                       B)  $2\sqrt{10}$                       C) 5                      D) 8                      E)  $5\sqrt{2}$
10. ¿Cuántos números múltiplos de 15, de 6 cifras están formados únicamente con los dígitos 5 y 8?  
**Nota.-** El número puede tener todos sus dígitos iguales.  
A) 32                      B) 31                      C) 64                      D) 48                      E) 10
11. Si  $x$  es un ángulo agudo, sean

$$M = \frac{2\cos^3 x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1} + \frac{2\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1},$$

$$N = \operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x) + \cos x(1 + \cos x) - 1.$$

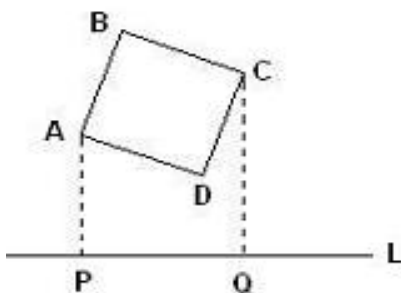
Calcula  $\frac{M}{N}$ .

- A)  $1 + \operatorname{sen} x + \cos x$
- B)  $1 - \operatorname{sen} x + \cos x$
- C)  $1 + \operatorname{sen} x - \cos x$
- D)  $1 - \operatorname{sen} x - \cos x$
- E)  $\operatorname{sen} x + \cos x - 1$



Primera Fase - Nivel 3

12. La circunferencia inscrita en el triángulo  $ABC$  es tangente al lado  $\overline{AB}$  en el punto  $M$  y tangente al lado  $\overline{BC}$  en el punto  $N$ . Si  $AB = 5\sqrt{2}$ ,  $BC = 12\sqrt{2}$  y  $AC = 13\sqrt{2}$ , calcula  $MN$ .  
A) 2                      B)  $2\sqrt{2}$                       C)  $\sqrt{2}$                       D) 4                      E)  $4\sqrt{2}$
13. El promedio de los  $3n + 2$  primeros números naturales que no son múltiplos de 4, es un número que es mayor que 101, pero menor que 102. ¿Cuál es el menor múltiplo de 4 que es mayor que  $n$ ?  
A) 47                      B) 48                      C) 50                      D) 52                      E) 56
14. En un rombo  $ABCD$ ,  $M$  es punto medio de  $AB$  y  $N$  es punto medio de  $AD$ . Si  $\angle ABD = \theta$  y  $\angle MCN = 2\alpha$ , calcula  $\cos^2\theta (9 + \cot^2\alpha)$ .  
A) 3                      B) 6                      C) 7                      D) 9                      E) 14
15. En una granja de Cajamarca hay 50 vacas. Algunas de ellas dan 7 litros de leche diarios y las demás, dan 8. Si al cabo de un cierto número de días las vacas dieron en total 4836 litros de leche, ¿cuántas vacas dan 8 litros de leche diarios?  
A) 47                      B) 32                      C) 13                      D) 28                      E) 22
16. Sea  $ABCDEF$  un hexágono equiángulo, si  $AB = BC$ ,  $CD = 4$ ,  $DE = 14$  y  $EF = 6$ , calcula el área del hexágono.  
**Nota.-** Un hexágono es equiángulo si sus seis ángulos interiores tienen igual medida.  
A)  $106\sqrt{3}$                       B)  $144\sqrt{3}$                       C)  $128\sqrt{3}$                       D)  $96\sqrt{3}$                       E)  $108\sqrt{3}$
17. En la figura se muestran un cuadrado  $ABCD$  y una recta  $L$  exterior al cuadrado. Sean  $P$  y  $Q$  las proyecciones ortogonales de los puntos  $A$  y  $C$  sobre  $L$ .



Si el área del pentágono  $PADCQ$  es  $a$ , y el producto  $AP \cdot CQ$  es  $b$ , halla la distancia del punto  $D$  a la recta  $L$ .

- A)  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$                       B)  $\sqrt{b} - \sqrt{a}$                       C)  $\sqrt{b - a}$                       D)  $\sqrt{a - b}$                       E)  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4}$



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

---

18. Sean  $a, b, c$  números enteros no nulos tales que  $a + b + c = 0$ . ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar  $ab + bc + ac$ ?
- A) 0                      B)  $-1$                       C)  $-\frac{3}{2}$                       D)  $-2$                       E)  $-3$
19. ¿Cuántos números naturales menores que 10000 tienen más dígitos impares que pares?
- A) 1105                      B) 3505                      C) 1505                      D) 2105                      E) 4105
20. Sea  $N$  el menor número natural que es múltiplo de 88 y cuyas cifras suman 88. Calcula la suma de las 8 siguientes cifras del número  $N$ : las 4 primeras y las 4 últimas.
- A) 8                      B) 60                      C) 61                      D) 64                      E) 68

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática  
Peruana

Segunda Fase - Nivel 3

19 de agosto del 2008

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Mario, Fernando y Alonso son tres hermanos. En el año 2004 la edad de Alonso era el doble de la edad de Mario, y actualmente, en el año 2008, la suma de las edades de Fernando y Alonso es el triple de la edad de Mario. Se sabe que, cuando Fernando nació, Alonso tenía 2 años. ¿En qué año la suma de las edades de los tres hermanos será 70 años?
2. Calcula el área del triángulo formado por los ejes cartesianos y la recta de ecuación  $2x + 3y - 12 = 0$ .
3. Con 120 cubitos de arista 1 se construye un paralelepípedo de  $4 \times 5 \times 6$ . Cada cara del paralelepípedo es pintada de color rojo. ¿Cuántos cubitos tienen al menos una cara pintada?
4. El área de un triángulo  $ABC$ , recto en  $B$ , es  $630 \text{ cm}^2$  y además  $\tan A + \sec A = \frac{7}{2}$ . ¿Cuántos centímetros mide la hipotenusa?
5. Sea  $N$  un número de 3 dígitos, y sea  $M$  el número que resulta al invertir el orden de los dígitos de  $N$ . Si el producto de  $M$  y  $N$  es 394695, calcula la suma de los dígitos de  $N$ .



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2008)

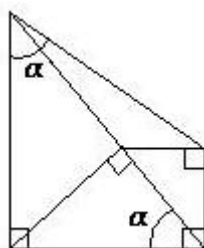


Sociedad Matemática  
Peruana

Segunda Fase - Nivel 3

19 de agosto del 2008

6. En el siguiente gráfico:



Calcula  $(2 - \cos 2\alpha)^2$ .

7. En un triángulo  $ABC$ , con  $AB < BC$ , la bisectriz interior trazada desde el vértice  $B$  corta al lado  $AC$  en el punto  $D$ . Sean  $M$  y  $N$  los pies de las alturas trazadas desde  $A$  y  $C$  hacia la recta  $BD$ . Si  $BM = 10$  y  $BD = 12$ , halla  $BN$ .
8. Sea  $ABC$  un triángulo donde  $AB = 3$ ,  $BC = 5$  y  $CA = 4$ . Si  $P$  es un punto en el mismo plano del triángulo  $ABC$ , halla el máximo valor que puede tomar  $2(PB)^2 - (PA)^2 - 3(PC)^2$ .
9. Encuentra la cantidad de números  $\overline{abcde}$  de 5 dígitos positivos y distintos entre sí, tales que  $a > b$ ,  $b < c$ ,  $c > d$  y  $d > e$ .
10. Si la ecuación  $(\sen x)^3 + (\cos x)^3 = a \sen x \cos x$  tiene exactamente dos soluciones en el intervalo  $[0, \pi]$ , halla el valor de  $a^4 + a^2 + 1$ .

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN





Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática  
Peruana

Tercera Fase - Nivel 3

2 de octubre del 2008

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

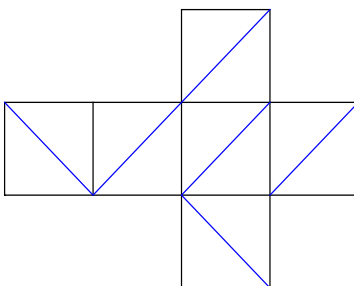
ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Si se cumple que

$$\sqrt{\tan x - 1} + \sqrt{\tan y - \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3} \tan z - 1} = 0$$

con  $0^\circ < x, y, z < 90^\circ$ , halla el valor de  $x + y + z$  en grados sexagesimales.

2. El desarrollo plano de un cubo es el siguiente



En cada cara se ha pintado una de sus diagonales. Un vértice del cubo se denomina *bueno* si en él concurren al menos dos diagonales pintadas. ¿Cuántos vértices buenos tiene dicho cubo?

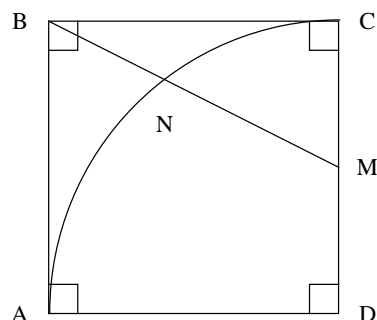
3. ¿Cuántas personas como mínimo deben haber en un restaurante para poder asegurar que en ese restaurante, hay al menos dos personas del mismo sexo nacidas en el mismo mes?

4. Sean  $x_1, x_2$  con  $0 < x_1 < x_2 < 360^\circ$  las soluciones de la ecuación

$$\operatorname{sen}(x - 70) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 20$$

Halla el valor de  $x_1 + x_2$  en grados sexagesimales.

5. En el gráfico mostrado  $DAC$  es un cuadrante y  $M$  es el punto medio de  $CD$ .



Si  $\angle ANM = \theta$ , halla el valor de  $\sec^2 \theta$ .

6. Sea  $x$  un número real positivo tal que  $x^3 = 1 + 2x$ . Si  $x^m = (3x + 2)^2$ , halla el valor de  $m$ .
7. Para cada entero positivo  $n \geq 2$ , sea  $p(n)$  el mayor divisor primo de  $n$ , por ejemplo  $p(20) = 5$ , pues 5 es el mayor divisor primo de 20. Halla la suma de todos los valores de  $n$  tales que  $n = 20p(n) + 2008$ .
8. En un triángulo  $ABC$ , se traza la ceviana interior  $BD$  tal que se cumple  $2BD + AD = CD$  y  $\angle ABD = 2\angle BAC = 4\angle ACB$ . Halla la medida del ángulo  $DBC$ , en grados sexagesimales.
9. En cada casilla del siguiente tablero de  $4 \times 4$

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

se debe escribir un 1 ó un 2, de tal forma que la suma de los números en cada fila y en cada columna sea un número primo. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

10. Sean  $x, y, z$  números reales que satisfacen

$$\begin{aligned} x &= 2y^2 - 1 \\ y &= 2z^2 - 1 \\ z &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

Halla la cantidad de valores distintos que puede tomar  $x + y + z$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Ministerio  
de Educación

## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2008)



Sociedad Matemática  
Peruana

Cuarta fase - Nivel 3

02 de diciembre del 2008

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Entrega tu cuadernillo de soluciones justificando adecuadamente todos los pasos.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

**Problema 1.-** Alrededor de una mesa redonda se sientan  $2n$  peruanos,  $2n$  bolivianos y  $2n$  Ecuatorianos. Si se pide que se pongan de pie a todos los que tienen vecinos, a su derecha y a su izquierda, a personas de la misma nacionalidad, ¿cuál es el mayor número de personas que se pueden poner de pie?

**Problema 2.-** Sean  $a$  y  $b$  números reales para los cuales se cumple:

$$a \csc x + b \cot x \geq 1, \quad \text{para todo } 0 < x < \pi$$

Halla el mínimo valor de  $a^2 + b$ .

**Problema 3.-**  $ABC$  es un triángulo acutángulo con  $\angle ACB = 45^\circ$ . Sean  $D$  y  $E$  puntos de los lados  $BC$  y  $AC$ , respectivamente, tales que  $AB = AD = BE$ . Sean  $M, N$  y  $X$  los puntos medios de  $BD$ ,  $AE$  y  $AB$ , respectivamente. Si las rectas  $AM$  y  $BN$  se cortan en el punto  $P$ . Demuestra que las rectas  $XP$  y  $DE$  son perpendiculares.

**Problema 4.-** Se pintan todos los puntos del plano que tienen ambas coordenadas enteras, usando los colores rojo, verde y amarillo. Si los puntos se pintan de modo que haya por lo menos un punto de cada color, demuestra que siempre existen tres puntos  $X, Y$  y  $Z$ , de colores distintos, tales que  $\angle XYZ = 45^\circ$ .

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

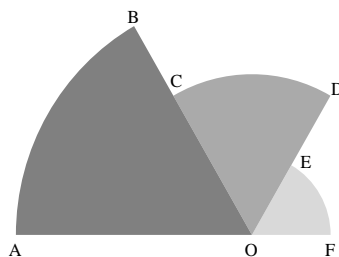
Primera Fase - Nivel 3

26 de junio de 2009

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Halla el valor numérico de  $\sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ + \csc 30^\circ$ .  
A) 2                      B)  $\frac{5}{2}$                       C) 3                      D)  $\frac{7}{2}$                       E)  $2 + \sqrt{3}$
2. Halla el área de la región sombreada sabiendo que  $AO = 3$ ,  $CO = 2$ ,  $EO = 1$  y  $m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = m\widehat{EF} = 60^\circ$



- A)  $2\pi$                       B)  $\frac{7\pi}{3}$                       C)  $3\pi$                       D)  $\frac{7\pi}{2}$                       E)  $\frac{14\pi}{3}$
3. Si  $\tan \alpha = 0,8$ , halla el valor de  $\frac{5\sin \alpha - 3\cos \alpha}{\sin \alpha - 2\cos \alpha}$ .  
A)  $-\frac{5}{6}$                       B)  $-\frac{5}{3}$                       C)  $\frac{5}{6}$                       D)  $\frac{5}{3}$                       E)  $-2$
  4. Simplifica  $\sqrt[mn]{3^{m-n}} \cdot \sqrt[np]{3^{n-p}} \cdot \sqrt[p]{3^{p-m}}$   
A) 1                      B)  $\sqrt{3}$                       C) 3                      D)  $3^{-1}$                       E)  $\sqrt[mnp]{3}$



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)

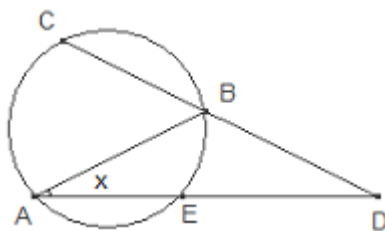


Sociedad Matemática  
Peruana

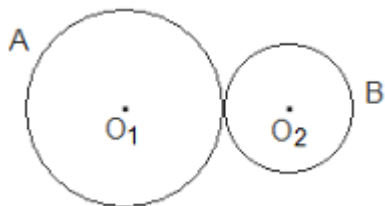
Primera Fase - Nivel 3

26 de junio de 2009

5. La suma de dos ángulos es 200 grados centesimales y la diferencia de sus suplementos es igual a 80 grados sexagesimales. Halla la medida del mayor de ellos en radianes .  
A)  $\frac{3\pi}{9}$       B)  $\frac{5\pi}{18}$       C)  $\frac{13\pi}{18}$       D)  $\frac{7\pi}{9}$       E)  $\frac{65\pi}{81}$
6. El producto de tres enteros positivos distintos es 72. ¿Cuál es la menor suma posible de dichos números?  
A) 16      B) 15      C) 14      D) 13      E) 12
7. En el gráfico se tiene que  $AB = BD$ ,  $m \widehat{AE} = 88^\circ$  y  $m \widehat{CB} = 110^\circ$ . Halla el valor de  $x$ .



- A)  $55^\circ$       B)  $44^\circ$       C)  $35^\circ$       D)  $33^\circ$       E)  $27^\circ$
8. María y Vanesa compran 13 caramelos y se los reparten entre ellas. Vanesa le reclama a María diciendo: “Tú tienes más del doble de lo que yo tengo, por favor dame tu tercera parte” y María le responde diciendo: “Pero si te doy mi tercera parte vas a tener más caramelos que yo”. ¿Cuántos caramelos tiene María?  
A) 6      B) 9      C) 4      D) 2      E) 12
9. Determina cuántos  $cm$  mide el radio de la rueda  $A$  si cuando ésta gira  $120^\circ$ , la rueda  $B$  gira  $2\pi$  radianes y además  $O_1O_2 = 80\text{ cm}$ .



- A) 20  $cm$       B) 30  $cm$       C) 40  $cm$       D) 50  $cm$       E) 60  $cm$



Ministerio  
de Educación

# OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2009)

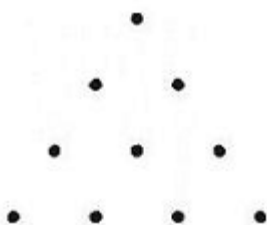


Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

26 de junio de 2009

10. En un triángulo rectángulo  $ABC$ , recto en  $C$ , se cumple que  $\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{3}{2}$ . Calcula el valor de  $\frac{\tan A + \tan B}{\cot A}$ .
- A)  $\frac{26}{25}$       B) 25      C) 26      D)  $\frac{13}{9}$       E)  $\frac{13}{4}$
11. Una niña observa la cabeza de su padre con un ángulo de elevación de  $\theta^\circ$  y sus pies con un ángulo de depresión de  $30^\circ$ . Si la distancia del ojo de la niña a la cabeza de su padre es 1,5 metros y  $\tan \theta = \frac{3}{4}$ , halla la altura del padre, en metros.
- A)  $0,8 + 0,6\sqrt{3}$     B)  $0,9 + 0,4\sqrt{3}$     C)  $0,9 + 0,6\sqrt{3}$     D)  $1,2 + 0,4\sqrt{3}$     E)  $1,2 + 0,6\sqrt{3}$
12. Se requiere programar una dieta con dos alimentos  $S$  y  $T$ . Cada unidad del alimento  $S$  contiene 100 calorías y 15 gramos de proteínas. La unidad del alimento  $T$  contiene 200 calorías y 10 gramos de proteínas. La dieta requiere como mínimo 1000 calorías y 90 gramos de proteínas. Si el precio de cada unidad del alimento  $S$  es 400 soles y de cada unidad del alimento  $T$  es de 300 soles, ¿cuántas unidades de cada alimento debe contener la dieta para minimizar el costo?
- A) 10 de  $S$     B) 9 de  $T$     C) 3 de  $S$  y 4 de  $T$     D) 4 de  $S$  y 3 de  $T$     E) 3 de  $S$  y 3 de  $T$
13. En el siguiente arreglo, por cada dos puntos se traza una recta. ¿Cuántas rectas distintas se pueden trazar?



- A) 18      B) 21      C) 24      D) 25      E) 27
14. Sea  $ABC$  un triángulo y  $D$  la proyección del punto  $B$  sobre la bisectriz del ángulo  $\angle ACB$ . Si el área del triángulo  $ABC$  es 12, determina el área del triángulo  $ADC$ .
- A) 12      B)  $12 \cos(\frac{C}{2})$       C)  $12 \operatorname{sen}(\frac{C}{2})$       D)  $12 \tan(\frac{C}{2})$       E) 6
15. ¿Cuál es el menor número de 6 dígitos distintos que es múltiplo de 8? Da como respuesta la suma de los dígitos de dicho número.
- A) 19      B) 20      C) 21      D) 22      E) 23



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

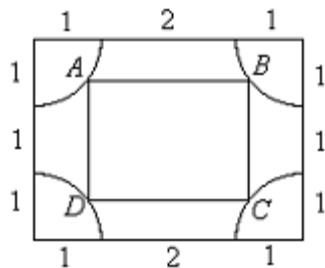
Primera Fase - Nivel 3

26 de junio de 2009

16. La siguiente suma tiene 101 filas, ¿cuál es el dígito central del resultado?

$$\begin{array}{r}
 2 + \\
 22 \\
 222 \\
 2222 \\
 \dots\dots\dots \\
 2222\dots\dots2222
 \end{array}$$

- A) 0                      B) 2                      C) 3                      D) 5                      E) 7
17. En cada vértice de un rectángulo de lados 3 y 4 se dibuja un cuadrante de radio 1, como muestra la figura. Luego se elige un punto de cada cuadrante de tal modo que se forme un rectángulo  $ABCD$  con  $AB = 2BC$  y lados paralelos a los del rectángulo mayor. Halla el área del rectángulo  $ABCD$ .



- A)  $\frac{72}{25}$                       B)  $\frac{98}{25}$                       C)  $\frac{128}{49}$                       D)  $\frac{162}{49}$                       E)  $\frac{49}{8}$
18. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $\sin^6 x + \cos^8 x = 1$  en el intervalo  $[0, 4\pi]$ ?  
A) 9                      B) 8                      C) 7                      D) 6                      E) 5
19. La suma de todos los divisores positivos de  $N$  es igual a 2801. ¿Cuántos números  $N$  cumplen con esta condición?  
A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

26 de junio de 2009

- 
20. Sean  $a, b, c$  números enteros (no necesariamente positivos) tales que  $a$ ,  $a + b$ ,  $a + b + c$  son números distintos del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ , halla el mayor valor de

$$(9a + 5b + 3c)(5a + b + 3c)$$

y da como respuesta la suma de sus dígitos.

A) 14

B) 11

C) 21

D) 23

E) 24

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**





Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

Segunda Fase - Nivel 3

27 de agosto de 2009

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. El valor numérico del área de un triángulo rectángulo  $ABC$ , recto en  $B$ , es igual a  $18 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C$ . Calcula la hipotenusa.
2. Estas son las instrucciones para encontrar un tesoro: A partir de un cierto punto caminar
  - 35 pasos hacia el este, luego
  - 30 pasos hacia el norte, luego
  - 15 pasos hacia el oeste, luego
  - 10 pasos hacia el norte, luego
  - 60 pasos hacia el este.

Finalmente, 20 pasos hacia el norte. ¿A cuántos pasos del punto inicial, en línea recta, está el tesoro?

3. En el segmento que une las posiciones de Rosa y Sandra se encuentra la base de una torre (las posiciones y la base están representadas por puntos). Rosa ve lo alto de la torre con un ángulo de elevación  $\alpha$  y Sandra ve lo alto de la torre con un ángulo de elevación  $\beta$ . Si la distancia que separa a Rosa y Sandra es 120 metros y  $\cot \alpha + \cot \beta = 3$ , halla la altura, en metros, de la torre.
4. En un hexágono regular  $ABCDEF$  cuyo lado mide 8, halla la distancia del punto de intersección de las diagonales  $AD$  y  $BF$  a la diagonal  $AC$ .



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

Segunda Fase - Nivel 3

27 de agosto de 2009

5. ¿Cuántos números capicúas son múltiplos de 6 y están comprendidos entre 2009 y 9002?

**Aclaración:** Los números capicúas son aquellos que leídos de izquierda a derecha son iguales que de derecha a izquierda, por ejemplo: 23532, 1441 y 2222 son capicúas.

6. En un tablero de  $3 \times 3$  colocamos los números del 1 al 9 bajo las siguientes condiciones:

- En las esquinas sólo hay números primos.
- En el centro no hay ningún cuadrado perfecto.

¿De cuántas formas se puede hacer esto?

7. A una fiesta asisten algunos hombres y algunas mujeres. Si se encuentran dos hombres se saludan con un apretón de manos. Pero si se encuentra un hombre con una mujer o se encuentran dos mujeres, entonces se dan un beso en la mejilla. Se sabe que todas las personas que asistieron a la fiesta se encuentran entre sí (dos a dos) y que el número de hombres excede al número de mujeres. Si el número de besos en la mejilla excedió en 75 al número de apretones de manos, ¿cuántas personas asistieron a la fiesta?

8. Sea  $x$  un número real tal que  $\tan^5 x + \tan x + 1 = 0$ , calcula  $\tan x + \csc^2 x$ .

9. Decimos que un conjunto no vacío formado por números naturales es *especial* si su mayor elemento es igual al doble de su menor elemento. Por ejemplo  $\{3, 4, 6\}$  y  $\{2, 4\}$  son especiales. Se sabe que el conjunto  $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$  contiene al menos 2009 sub-conjuntos especiales. ¿Cuál es el menor valor de  $n$  para que esto sea posible?

10. Fernando tiene una cantidad finita de puntos en el plano tales que la distancia entre dos puntos cualesquiera es uno de los tres números 1, 2 ó  $\sqrt{3}$ . ¿Cuál es el máximo número de puntos que puede tener Fernando?

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

ONEM PERÚ 2009



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

Tercera Fase - Nivel 3

2 de octubre de 2009

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate, se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En cada una de las 6 caras de un cubo, se escribe un número entero positivo de manera que el producto de los números de las 6 caras es igual a 360. Además, tres de dichas caras contienen a tres números impares consecutivos y las otras tres caras tienen escritas en ellas a tres números pares. Halla el valor de la suma de los números escritos en las 6 caras .

**Observación.** Los números escritos en las caras no son necesariamente diferentes.

2. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y la altura relativa a la hipotenusa mide 12 cm, halla la suma de las longitudes de los catetos de dicho triángulo rectángulo.
3. Si la suma de los números de 3 cifras distintas  $\overline{abc}$  y  $\overline{bca}$  es 10 veces el producto de las cifras de  $\overline{abc}$ , halla la suma de las cifras de  $\overline{abc}$ .
4. Si  $\sec x + \csc x = 3$ , halla el valor de  $(\tan x + \cot x + 1)^2$ .
5. Halla la suma de todos los valores que puede tomar  $k$ , de tal modo que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución única:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

$$x + 2y = k$$

---

ONEM PERÚ 2009



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

Tercera Fase - Nivel 3

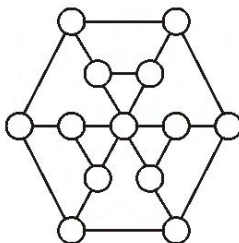
2 de octubre de 2009

6. En un triángulo  $ABC$  con  $\angle B \neq \angle C$  y  $\angle C \neq 90^\circ$  se cumple

$$\tan B = \frac{2 \cos B \cos C - \cos A}{\sin A - 2 \sin C \cos B}$$

Halla la suma de todos los valores que puede tomar el ángulo  $B$ . Expresa tu respuesta en grados sexagesimales.

7. En la siguiente figura, cada círculo representa una estación y cada segmento representa una vía de una red de trenes de la ciudad *Caos*. El alcalde de la ciudad quiere eliminar algunas vías, de manera que de cada estación salgan por lo menos dos vías de trenes.



Halla el máximo número de vías que el alcalde puede eliminar.

8. En una circunferencia de centro  $O$  se toman tres puntos  $A, B, C$  tales que el triángulo  $ABC$  es acutángulo,  $\angle A > 45^\circ$  y  $AB = 20\text{cm}$ ;  $AC = 19\text{cm}$ . Las alturas trazadas desde  $A$  y  $B$  hacia sus lados opuestos se cortan en  $H$  y se tiene que el segmento  $HO$  es paralelo a  $AC$ . Halla el mayor valor de  $BC^2$  (en centímetros cuadrados).
9. Sea  $S = \sqrt{9(1)^2 + (1)} + \sqrt{9(2)^2 + (2)} + \sqrt{9(3)^2 + (3)} + \dots + \sqrt{9(7)^2 + (7)}$ . Si el valor de  $S$  se encuentra entre los enteros consecutivos  $A$  y  $B$  ( $A < S < B$ ), halla el valor de  $A + B$ .



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

Tercera Fase - Nivel 3

2 de octubre de 2009

10. En cada una de las 13 casillas de la siguiente figura se escribe un número entero del 1 al 16, no necesariamente distintos, de manera que se cumplan las tres condiciones siguientes:

- El primer número de la fila es el 1 y el último número es el 16 .
- Si dos casillas tienen un lado común, entonces la diferencia positiva de los números escritos en ellas es 1 u 8 .
- Si se escriben el 8 y el 9, no pueden estar en casillas con un lado común.

¿De cuántas maneras es posible escribir números en las 11 casillas restantes?

|   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |    |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|----|
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 16 |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|----|

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática  
Peruana

Cuarta fase - Nivel 3

29 de noviembre del 2009

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
  - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

**Problema 1.** Para cada entero positivo  $n$ , sea  $c(n)$  la cantidad de dígitos de  $n$ . Sea  $A$  un conjunto de enteros positivos con la siguiente propiedad: Si  $a$  y  $b$  son dos elementos distintos de  $A$ , entonces  $c(a+b)+2 > c(a)+c(b)$ . Halle la mayor cantidad de elementos que puede tener  $A$ .

**Problema 2.** En un cuadrilátero  $ABCD$ , se inscribe una circunferencia que es tangente a los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  en los puntos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Si  $(AM)(CP) = (BN)(DQ)$ , pruebe que  $ABCD$  es un cuadrilátero inscriptible.

**Problema 3.**

- Sobre una circunferencia se marcan 8 puntos. Decimos que Juliana hace una “operación T” si escoge tres de dichos puntos y pinta los lados del triángulo que determinan, de modo que cada triángulo pintado tenga a lo más un vértice en común con un triángulo pintado anteriormente. ¿Cuál es la mayor cantidad de “operaciones T” que puede hacer Juliana?
- Si en la parte (a), en vez de considerar 8 puntos se consideran 7 puntos, ¿cuál es la mayor cantidad de “operaciones T” que puede hacer Juliana?

**Problema 4.** Sea  $n$  un entero positivo. Una cuadrícula rectangular de  $4 \times n$ , es dividida en rectángulos de  $2 \times 1$  ó  $1 \times 2$  (como si fuera completamente cubierta con fichas de dominó, sin superposiciones ni huecos). Luego se pintan de rojo todos los puntos de la cuadrícula que son vértices de alguno de los rectángulos de  $2 \times 1$  ó  $1 \times 2$ . ¿Cuál es la menor cantidad de puntos rojos que se puede obtener?



Ministerio  
de Educación

VII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2010)



Sociedad Matemática  
Peruana

**Primera Fase - Nivel 3**

17 de junio de 2010

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Las fechas de cumpleaños de Blanca, Cristina, Daniela y Flor son abril 1, abril 21, junio 17 y julio 21, no necesariamente en ese orden. Sabemos que Flor nació el mismo mes que Cristina y que el número de día en que nacieron Cristina y Daniela es el mismo, aunque nacieron en distintos meses. ¿Quién nació en junio 17?  
A) Cristina      B) Daniela      C) Blanca      D) Flor      E) No se puede determinar
2. ¿Cuántos grados sexagesimales mide un ángulo cuyo complemento equivale al 10% de su suplemento?  
A) 18                      B) 60                      C) 80                      D) 70                      E) 75
3. Si  $p, q, r$  son enteros positivos tales que  $pq = 24$  y  $qr = 20$ , hallar el menor valor que puede tomar  $p + q + r$ .  
A) 45                      B) 24                      C) 15                      D) 12                      E) 20
4. ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?  
A)  $\sin 20^\circ$               B)  $\sec 20^\circ$               C)  $\tan 20^\circ$               D)  $\csc 20^\circ$               E)  $\cos 20^\circ$
5. Un número natural  $N$  tiene tres dígitos. El dígito de las centenas es igual a la suma de los otros dos, y el quintuplo del dígito de las unidades equivale a la suma de los dígitos de las centenas y decenas. Al invertir el orden de sus dígitos, el número  $N$  queda disminuido en 594. Hallar el resto de dividir  $N$  entre 20.  
A) 15                      B) 11                      C) 8                      D) 5                      E) 3
6. ¿Cuántos valores reales de  $x$  satisfacen la siguiente ecuación?

$$|x - 4| + |x - 3| = 9$$

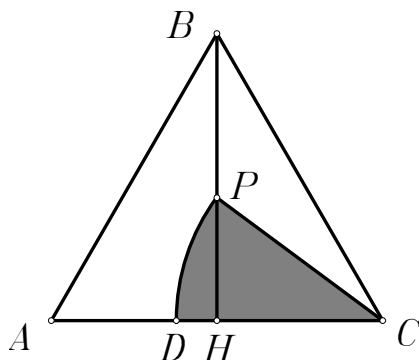
- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4



7. En un triángulo  $ABC$ , recto en  $C$ , se cumple que  $\sin A = \sin B + \frac{1}{3}$ . Calcular

$$\tan A \cdot \cos^2 A.$$

- A)  $\frac{2}{3}$       B)  $\frac{1}{9}$       C)  $\frac{4}{9}$       D)  $\frac{9}{4}$       E)  $\frac{8}{9}$
8. Si  $n$  es un entero positivo, ¿cuál de las siguientes afirmaciones acerca del número  $(1 + n^3 + n^6 + n^9)$  siempre es correcta?
- I. Es un cuadrado perfecto.  
II. Es un número compuesto.  
III. Es un número par.
- A) Sólo I      B) I y II      C) I, II y III      D) Sólo II      E) II y III
9. Se traza la altura  $BH$  en el triángulo equilátero  $ABC$  que tiene lado  $6\sqrt{3}$  y  $D$  es un punto de  $AH$  tal que  $DH = 3(2 - \sqrt{3})$ .



Calcular el área del sector circular  $DCP$ .

- A)  $3\pi$       B)  $\sqrt{3}\pi$       C)  $2\pi$       D)  $3\sqrt{3}\pi$       E)  $6\pi$
10. Determinar el máximo valor de  $F = \frac{7 + 3 \cos \theta}{2 + \cos \theta}$ , donde  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ .
- A) 1      B)  $\frac{7}{2}$       C) 4      D)  $\frac{10}{3}$       E)  $\frac{3}{10}$
11. Decimos que un número de la forma  $\overline{abc}$  es *bueno* si  $a^2 = b \times c$ . Determinar el mayor número bueno que está formado por tres dígitos distintos. Dar como respuesta la suma de sus dígitos.
- A) 17      B) 18      C) 21      D) 20      E) 19





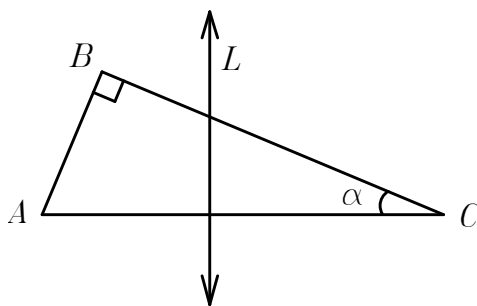
12. Si  $n$  es un entero positivo, la expresión  $n!$ , llamada *factorial* de  $n$ , denota el producto de todos los enteros positivos menores o iguales que  $n$ ; es decir:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Determinar el menor entero positivo  $m$  para el cual el siguiente número es múltiplo de 2010:

$$1! \times 2! \times 3! \times \cdots \times m!$$

- A) 201                      B) 2010                      C) 100                      D) 67                      E) 30
13. Los equipos de fútbol de Perú, Brasil, Chile y Argentina jugaron un torneo cuadrangular de fútbol, donde cada equipo jugó contra cada uno de los otros equipos exactamente una vez. Es decir, se jugaron 6 partidos en total. En cada partido se otorga 3 puntos al ganador, 0 puntos al perdedor, y 1 punto a cada equipo en caso de empate. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:
- I. Al terminar el torneo es posible que algún equipo tenga 7 puntos.  
II. Es posible que Perú haya obtenido el primer lugar del torneo, a pesar de que haya perdido contra Argentina.  
III. Si un equipo no perdió ningún partido, puede terminar con 4 puntos.  
IV. Un equipo que obtuvo 6 puntos puede ser el único que ocupa el primer lugar del torneo.
- A) I, III y IV                      B) I y IV                      C) I y II                      D) I, II y IV                      E) II y III
14. La hipotenusa del triángulo rectángulo  $ABC$  mide  $2\sqrt{2}$  y  $\angle ACB = \alpha$ . La recta  $L$  es perpendicular a la hipotenusa y divide al triángulo  $ABC$  en dos regiones de igual área. Calcular la distancia de  $C$  a la recta  $L$ .



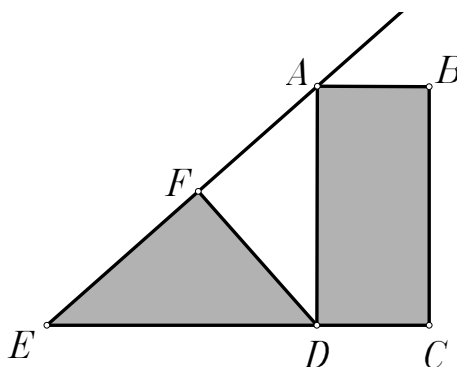
- A)  $\sin \alpha$                       B)  $2 \sin \alpha$                       C)  $\tan \alpha$                       D)  $\sqrt{2} \cos \alpha$                       E)  $2 \cos \alpha$
15. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra *CONTEO* si las vocales no pueden ir juntas, ni tampoco las consonantes?
- Aclaración.* Un orden posible es ENOTOC. Notar que no importa si la palabra tiene o no significado.
- A) 12                      B) 72                      C) 24                      D) 36                      E) 18



16. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo, recto en  $B$ . En la hipotenusa  $AC$  se ubica el punto  $D$  de tal forma que  $BD = BC$ , y en la prolongación de  $BD$  se ubica el punto  $E$  tal que  $\angle AEB = 90^\circ$ . Si  $AE = 3$  y la distancia de  $D$  a  $BC$  es 6, calcular  $\frac{AC}{AD}$ .

A)  $\frac{2}{3}$                       B)  $\frac{3}{2}$                       C) 2                      D) 3                      E)  $\frac{10}{3}$

17. En la siguiente figura,  $ABCD$  es un rectángulo que tiene la misma área que el triángulo rectángulo  $DFE$ .



Si  $AD = m$  y  $FD = n$ , hallar la distancia de  $B$  a la recta  $AE$ .

A)  $\frac{n^2}{m}$                       B)  $\frac{n^3}{2m^2}$                       C)  $\frac{2n^3}{m^2}$                       D)  $\frac{m^3}{2n^2}$                       E)  $\frac{n^3}{m^2}$

18. Sean  $A$  y  $B$  dos enteros positivos. Decimos que  $A$  es hijo de  $B$ , si  $A < B$ ,  $A$  es un divisor de  $B$  y, además, la suma de los dígitos de  $A$  es igual a la suma de los dígitos de  $B$ .

Por ejemplo, 12 es hijo de 300, pues  $12 < 300$ , 12 es un divisor de 300 y, además,  $1+2 = 3+0+0$ .

Si 2 y 11 son hijos de  $N$  y  $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$  son los cuatro menores valores que puede tomar  $N$ . Calcular el resto de dividir  $n_4$  entre 14.

A) 0                      B) 2                      C) 8                      D) 10                      E) 6

19. Sean  $a, b, c$  números diferentes de 0, tales que

$$a + b + c = -abc \quad \text{y} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2.$$

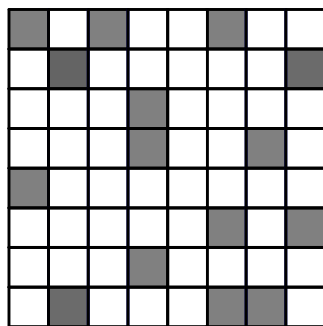
Hallar el valor de

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}$$

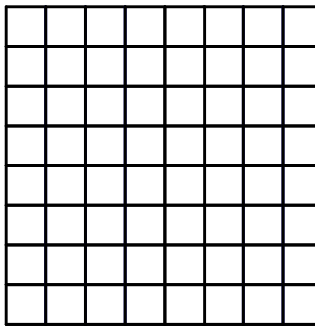
A) -1                      B) 3                      C) 1                      D) 0                      E) -3



20. En el Tablero 1 se han pintado 15 casillas de negro y notamos que se cumple la siguiente propiedad: “Cada cuadradito blanco tiene al menos un punto en común con algún cuadradito negro”. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que se deben pintar de negro en el Tablero 2 para que se cumpla la misma propiedad?



Tablero 1



Tablero 2

- A) 10                      B) 11                      C) 7                      D) 8                      E) 9

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Ministerio  
de Educación

VII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2010)



Sociedad Matemática  
Peruana

**Segunda Fase - Nivel 3**

20 de agosto de 2010

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Ana y Beto van desde el punto  $P$  hasta el punto  $Q$  de dos maneras distintas. Ana camina 6 pasos hacia el oeste y cinco pasos hacia el norte. Beto camina 1 paso hacia el norte, 2 pasos hacia el oeste, 3 pasos hacia el sur, 4 pasos hacia el este, 5 pasos hacia el norte, y así sucesivamente, hasta llegar al punto  $Q$ . ¿Cuántos pasos dió Beto en total?
2. Se tiene un triángulo equilátero y un hexágono regular. El perímetro del hexágono regular es igual a 30 veces el lado del triángulo equilátero. Si dividimos el área del hexágono entre el área del triángulo, ¿qué número obtenemos?
3. Se sabe que la siguiente ecuación tiene exactamente dos raíces reales distintas  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\frac{36^x + 36}{20} = 6^x.$$

Calcula  $10(x_1 + x_2)$ .

4. Se escribe una lista ordenada con todos los números de 4 dígitos que están formados solamente con dígitos impares, de la siguiente forma:

1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1131, ...

El número 1111 está en el lugar 1, el número 1113 está en el lugar 2, y así sucesivamente. ¿Qué número está en el lugar 128?



5. Sea  $ABC$  un triángulo y  $M$  el punto medio del lado  $BC$ . Si se cumple que  $AB = 10\sqrt{2}$ ,  $\tan(\angle BAM) = \frac{3}{4}$  y  $\tan(\angle MAC) = 1$ . Calcula la longitud del segmento  $AC$ .
6. Jesús dice un número entero positivo. Tomás multiplica el número de Jesús por 2 y le suma 6, luego, extrae la raíz cuadrada y obtiene un número entero. Amilcar en cambio le resta 1 al número de Jesús y luego, le extrae la raíz cuadrada y obtiene también un número entero. Si el número que obtuvo Tomás es 6 unidades mayor que el número que obtuvo Amilcar. ¿Cuál es el número que dijo Jesús?
7. Hay  $n$  niños y una caja con  $m$  caramelos. El primer niño coge 1 caramelo más la décima parte de los restantes, el segundo niño coge 2 caramelos más la décima parte de los restantes, y así sucesivamente hasta que el  $n$ -ésimo niño coge  $n$  caramelos. Si todos los niños cogieron la misma cantidad de caramelos. Determina el valor de  $m + n$ .
8. Calcula el resto de dividir entre 111 el número  $11^{600} + 11^{598} + 11^{596} + 11^{594} + \dots + 11^2 + 11^0$ .
9. Sea  $ABC$  un triángulo con  $\angle A = 10^\circ$ ,  $\angle B = 140^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$ . Sobre la bisectriz interior del ángulo  $B$  se toma un punto  $P$ , distinto de  $B$ , de tal manera que  $AB = AP$  ( $P$  está en la región exterior al triángulo  $ABC$ ). Halla la medida del ángulo  $\angle BPC$  en grados sexagesimales.
10. En una mesa redonda se sientan 9 personas, cada una tiene en su mano una carta con alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Todas las personas tienen números distintos en sus cartas. Luego, cada persona escribe en un papel la suma de su número con los números de sus dos vecinos; finalmente, se escoge  $M$ , el mayor de los 9 números escritos. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar  $M$ ?

*Aclaración.* Cada persona tiene dos vecinos, el que se sienta a su izquierda y el que se sienta a su derecha.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Ministerio  
de Educación

VII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2010)



Sociedad Matemática  
Peruana

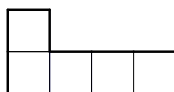
**Tercera Fase - Nivel 3**

7 de octubre de 2010

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Si el polinomio  $x^2 + 7x + 12$  es un divisor del polinomio  $x^4 + ax^2 + b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes reales. Calcula el valor de  $b - 2a$ .
2. En un salón de clases hay 20 alumnos. La profesora escogió un día del presente año (2010) que no era día de cumpleaños de ninguno de sus alumnos, y en ese día pidió a cada alumno que calcule la suma del año en que nació con su edad. Después la profesora calculó la suma de los 20 números que le dieron los alumnos y obtuvo 40183. ¿De los 20 alumnos, cuántos aún no habían cumplido años hasta ese momento?
3. Si  $\cot x \cdot \csc x = 2/3$ , halla  $(2 \sin x)^4 + (2 \cos x)^4$ .
4. Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo en donde la altura  $BH$ , relativa al lado  $AC$ , mide 4. Si se cumple que  $\angle A = 2\angle C$  y que  $AC = 11$ , halla el valor del área del triángulo rectángulo  $BHC$ .
5. Tenemos varias piezas de la forma:

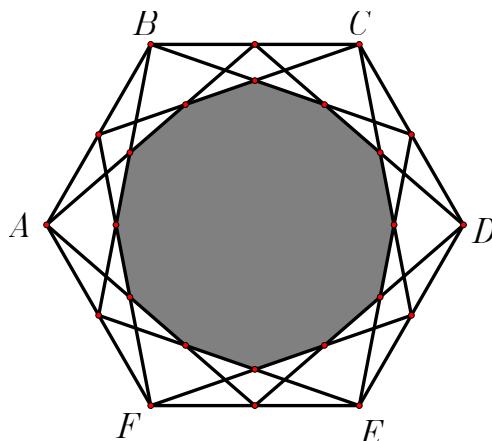


¿Cuál es la menor cantidad de piezas que se necesita para formar un cuadrado?

*Aclaración.* Cada pieza está formada por 5 cuadraditos. Las piezas se pueden girar.



6. Cada una de las casillas de un tablero de  $5 \times 5$  debe ser pintada de un color, de tal forma que cada rectángulo de  $1 \times 4$ ,  $4 \times 1$  o de  $2 \times 2$  no tenga dos casillas del mismo color. ¿Cuál es la mínima cantidad de colores que se necesita?
7. Sea  $A$  un conjunto formado por enteros positivos. El menor elemento de  $A$  es 21 y el mayor elemento de  $A$  es  $m$ . Si la suma de todos los elementos de  $A$  es un cuadrado perfecto. Determina el menor valor posible de  $m$ .
8. En la siguiente figura se muestra un hexágono regular  $ABCDEF$  de área 60, en el que se han marcado los seis puntos medios de sus lados.



Halla el área del dodecágono sombreado.

9. Si  $\theta$  es un ángulo que satisface  $|\sin 3\theta| = |\sin \theta|$ , determina cuántos valores distintos toma la expresión  $\cos \theta$ .
10. Considera una sucesión infinita  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , de enteros positivos. Supón que las siguientes dos condiciones son ciertas para todo entero positivo  $n$ :
- $a_n$  es múltiplo de  $n$ .
  - $|a_n - a_{n+1}| \leq 4$ .

Determina el mayor valor que puede tomar  $a_1$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Ministerio  
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2010)



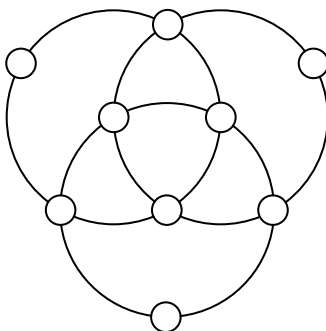
Sociedad Matemática  
Peruana

Cuarta fase - Nivel 3

07 de noviembre de 2010

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
  - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

**Problema 1.** En cada uno de los 9 círculos pequeños de la siguiente figura escribimos números enteros positivos menores que 10, sin repeticiones.



Además se cumple que la suma de los 5 números ubicados alrededor de cada una de las 3 circunferencias es siempre igual a  $S$ . Halla el mayor valor posible de  $S$ .

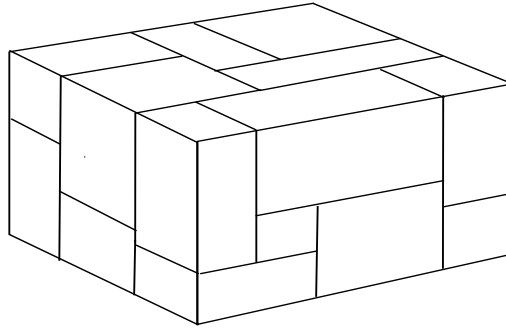
**Problema 2.** Una progresión aritmética está formada por 9 enteros positivos tales que el producto de estos 9 términos es múltiplo de 3. Prueba que dicho producto es también múltiplo de 81.

**Problema 3.** Considera  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres puntos colineales del plano tales que  $B$  está entre  $A$  y  $C$ . Sea  $S$  la circunferencia de diámetro  $AB$  y  $L$  una recta que pasa por  $C$ , que no intersecta a  $S$  y que no es perpendicular a la recta  $AC$ . Los puntos  $M$  y  $N$  son, respectivamente, los pies de las alturas trazadas desde  $A$  y  $B$  a la recta  $L$ . Desde  $C$  se trazan las dos rectas tangentes a  $S$ , donde  $P$  es el punto de tangencia más cercano a  $L$ . Prueba que el cuadrilátero  $MPBC$  es inscriptible si y sólo si las rectas  $MB$  y  $AN$  son perpendiculares.



**Problema 4.** Un paralelepípedo se dice *entero* cuando al menos una de sus aristas mide un número entero de unidades. Se tiene un grupo de paralelepípedos enteros con los cuales se arma un paralelepípedo mayor, que no tiene huecos dentro ni en su borde. Demuestra que el paralelepípedo armado también es entero.

*Ejemplo.* En la siguiente figura se muestra un paralelepípedo armado con un cierto grupo de paralelepípedos enteros.





Ministerio  
de Educación

VIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2011)



Sociedad Matemática  
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

30 de junio de 2011

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

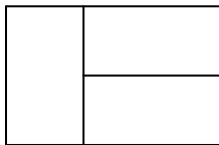
1. Sean  $A, B, C, D$  y  $E$  enteros positivos tales que:

$$A + B = B + C = C + D = D + E = 3,$$

¿cuántos valores puede tomar  $A + B + C + D + E$ ?

- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

2. En la siguiente figura el rectángulo grande ha sido dividido en tres rectángulos congruentes. Si el área del rectángulo grande es 54, calcula su perímetro.



- A) 6                      B) 9                      C) 15                      D) 30                      E) 60

3. Dentro de una caja grande se colocan 3 cajas medianas, dentro de cada una de éstas se colocan 4 cajas pequeñas y dentro de cada una de estas últimas se colocan 3 canicas. ¿Cuál es la diferencia entre el número total de cajas y el número de canicas?

- A) 12                      B) 20                      C) 15                      D) 10                      E) 18

4. Las siguientes dos sumas tienen la misma cantidad de sumandos

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

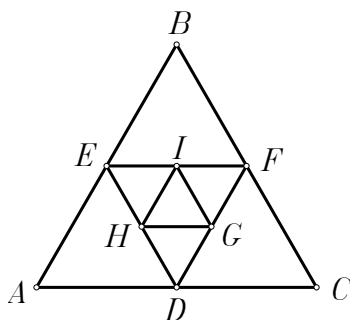
$$S_2 = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots$$

Si ambas sumas dan el mismo resultado, ¿cuántos términos hay en cada suma?

- A) 54                      B) 72                      C) 67                      D) 100                      E) 50



5. En la siguiente figura el triángulo grande es equilátero y los puntos  $D, E, F, G, H$  e  $I$ , son puntos medios. ¿Qué porcentaje del área del triángulo  $ABC$  es el área del triángulo  $GHI$ ?

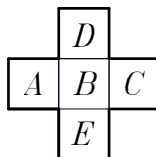


- A) 6 %                      B) 16 %                      C) 6.25 %                      D) 0.625 %                      E) 4 %
6. Determina cuántos números primos  $p$  cumplen la condición:

$$8! + 1 < p < 8! + 9.$$

*Aclaración:* La expresión  $n!$  denota el producto de los primeros  $n$  enteros positivos. Por ejemplo,  $3! = 1 \times 2 \times 3$ .

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4
7. En la siguiente figura, tenemos que reemplazar las letras  $A, B, C, D, E$  por los números 1, 2, 3, 4, 5 (sin repetir) de tal modo que los números  $A + B + C$  y  $D + B + E$  sean múltiplos de 3, ¿de cuántas formas se puede hacer esto?



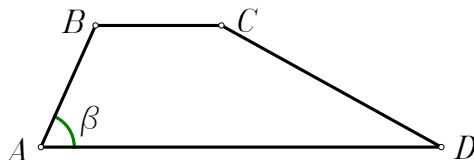
- A) 2                      B) 4                      C) 8                      D) 16                      E) 12
8. Los ángulos de un cuadrilátero están en progresión geométrica. Si la medida del ángulo mayor es 27 veces la medida del menor, ¿cuál es la diferencia entre el mayor y menor ángulo?
- A)  $216^\circ$                       B)  $261^\circ$                       C)  $234^\circ$                       D)  $240^\circ$                       E)  $243^\circ$
9. Sabino compró varios helados a 2 soles cada uno, y Huamaní compró otra cantidad de helados a 3 soles cada uno. Si juntos compraron menos de 15 helados y gastaron más de 15 soles cada uno, ¿cuántos helados compraron en total?
- A) 13                      B) 14                      C) 9                      D) 12                      E) 11



10. En una clase mixta de 35 estudiantes hay 19 mujeres. Además, 7 hombres aprobaron aritmética, 6 hombres aprobaron álgebra, 5 hombres y 8 mujeres no aprobaron ninguno de los dos cursos, 5 estudiantes aprobaron los dos cursos y 11 estudiantes aprobaron solamente aritmética. ¿Cuántas mujeres aprobaron solamente álgebra?

A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

11. En la figura se muestra un trapecio  $ABCD$  de lados paralelos  $BC$  y  $AD$ . Si  $AB = BC = a$ ,  $CD = 2a$  y  $AD = 3a$ , calcula el valor de  $\sec \beta$ .



A) 3                      B) 4                      C) 2                      D)  $\sqrt{5}$                       E) 5

12. Sean  $a, b, c$  tres números que están en progresión aritmética, tales que si los aumentamos en 1, 4 y 9, respectivamente, obtenemos tres números que son directamente proporcionales a los números 1, 3 y 6. Halla el valor de  $a + b + c$ .

A) 12                      B) 30                      C) 9                      D) 6                      E) 18

13. Sea  $\theta$  un ángulo agudo y  $x = \sin \theta + \cos \theta$ , determina el valor de:

$$N = (\sec \theta + \csc \theta) - (\tan \theta + \cot \theta)$$

A)  $\frac{2}{x^2 + 1}$                       B)  $\frac{1}{x^2 + 1}$                       C)  $\frac{2}{x + 1}$                       D)  $\frac{2}{x^2 - 1}$                       E)  $\frac{1}{x + 1}$

14. Coralí, una chica supersticiosa, al enumerar las 200 páginas de su diario, comenzó del 1, pero excluyó aquellos números donde las cifras 1 y 3 aparecen juntas en cualquier orden. Por ejemplo, los números 31 y 137 no aparecen en el diario, pero el 103 sí aparece. ¿Cuál fue el número que escribió en la última página de su diario?

A) 210                      B) 212                      C) 213                      D) 214                      E) 215

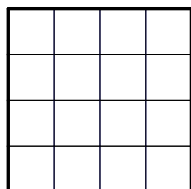
15. ■  $M$  es igual al producto o a la suma de 2 y 7.  
■  $N$  es igual al producto o a la suma de 3 y 9.  
■  $P$  es igual al producto o a la suma de 4 y 8.  
■  $Q$  es igual al producto o a la suma de 5 y 10.

¿Cuál es el único valor posible para  $M + N + P + Q$ , entre los valores mostrados?

A) 87                      B) 88                      C) 89                      D) 90                      E) 91



16. En un cuadrilátero  $ABCD$ , el punto  $P$  divide al segmento  $AC$  en la razón de 1 a 3 (con  $AP < PC$ ). Si las áreas de las regiones triangulares  $ABD$  y  $BDC$  son  $70 m^2$  y  $30 m^2$ , respectivamente, entonces el área de la región triangular  $PBD$  es:
- A)  $42 m^2$       B)  $39 m^2$       C)  $40 m^2$       D)  $44 m^2$       E)  $45 m^2$
17. ¿Cuántos triángulos escalenos tienen lados de longitudes enteras y perímetro menor que 13?
- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 8
18. El producto de los dígitos de un cuadrado perfecto de cuatro dígitos es 54. Calcula el resto al dividir dicho cuadrado perfecto entre 28.
- A) 1      B) 0      C) 3      D) 20      E) 12
19. Sea  $ABCD$  un rombo tal que  $\angle ABC = 120^\circ$ . Se ubica en la región exterior del rombo un punto  $P$  tal que  $\angle PAB = 50^\circ$  y  $\angle PCB = 70^\circ$ , calcula la medida de  $\angle PBA$ .
- A)  $70^\circ$       B)  $80^\circ$       C)  $60^\circ$       D)  $100^\circ$       E)  $90^\circ$
20. Hay un tablero de  $4 \times 4$  dibujado en la pizarra y Carlos debe pintar cada casilla de blanco o de negro, de tal modo que en cada fila y en cada columna haya 2 casillas de cada color. ¿De cuántas maneras Carlos puede pintar el tablero?



- A) 72      B) 36      C) 96      D) 90      E) 108

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio  
de Educación

VIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2011)



Sociedad Matemática  
Peruana

Segunda Fase - Nivel 3

19 de agosto de 2011

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Un granjero vendió cuyes a S/. 12 cada uno y con el importe de la venta decidió comprar algunos conejos a S/. 14 cada uno, quedándole S/. 26. ¿Qué cantidad de conejos compró, si se sabe que al sumar el número de cuyes vendidos con el número de conejos comprados se obtiene 182 ?
2. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo de hipotenusa  $AC$ . Se ubica el punto  $D$  en el cateto  $BC$  de modo que  $\frac{CD}{DB} = 3$ . Si  $\angle DAB = \alpha$  y  $\angle ACB = \beta$ , halla el valor de  $\cot \alpha \cdot \cot \beta$ .
3. Sea  $f$  una función definida en el conjunto de los números enteros tal que  $f(1) = 1$ ,  $f(3) = 2$  y además:
$$f(x) = f(x-1) + f(x+1),$$
para todo número entero  $x$ . Calcula  $f(2011)$ .
4. En el siguiente tablero se debe escribir números del conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  de tal manera que en cada fila, en cada columna y en cada uno de los cuadrados de  $2 \times 2$  señalados no hayan dos números iguales (de forma similar al Sudoku). Halla la suma de todos los posibles valores de  $x$ .

|   |   |   |     |
|---|---|---|-----|
| 1 |   |   |     |
|   |   |   | $x$ |
|   |   | 4 |     |
|   | 2 |   |     |



5. Ana le dice a Beatriz: “Estoy pensando en un número de dos cifras, y el producto de esas dos cifras es 36”. Al ver las posibilidades, Beatriz le pide más datos, a lo que Ana responde: “Te podría decir la suma de sus cifras, pero no sería suficiente para que supieras con seguridad el número que pienso. En lugar de eso, te diré que mi número es menor que 70”. ¿En qué número está pensando Ana?

6.  $\theta$  es un ángulo para el cual  $\tan\theta = 3$  y además

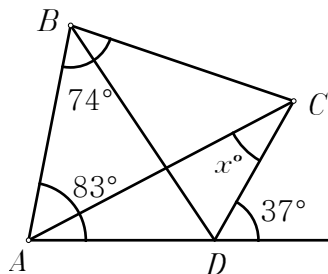
$$\operatorname{sen}\theta + \tan\theta + \sec\theta = a,$$

$$\cos\theta + \cot\theta + \csc\theta = b.$$

Halla el valor de  $\frac{a-b}{b+1}$ .

7. Decimos que un entero positivo es *libre* cuando tiene exactamente un divisor que es cuadrado perfecto. Por ejemplo, el número 6 es libre porque entre sus divisores: 1, 2, 3, 6, el único que es cuadrado perfecto es el  $1 = 1^2$ ; mientras que 45 no es libre porque tiene dos divisores que son cuadrados perfectos:  $1 = 1^2$  y  $9 = 3^2$ . ¿Cuántos enteros positivos menores que 100 son libres?

8. En el gráfico se cumple que  $BC = CD$ ,  $\angle CBA = 74^\circ$  y  $\angle BAD = 83^\circ$ . Halla el valor de  $x$ .



9. Percy tiene 5 helados cuyos sabores son: vainilla, fresa, chocolate, lúcumo y coco. Sin embargo, las etiquetas están mezcladas, y Percy solamente sabe que todas las etiquetas indican un sabor diferente al que contienen. ¿Cuántos helados como mínimo debe abrir Percy para saber con seguridad el sabor de cada helado?
10. Se tiene un tablero de  $6 \times 6$  con un grillo en cada casilla. Cuando sonó una campana, cada grillo saltó a una casilla vecina (casillas vecinas son las que comparten un lado). Como resultado, algunas casillas quedaron vacías y otras contienen uno o más grillos. ¿Cuántas casillas vacías puede quedar como máximo luego del sonido de la campana?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio  
de Educación

VIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2011)



Sociedad Matemática  
Peruana

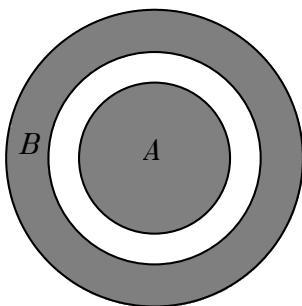
**Tercera Fase - Nivel 3**

30 de setiembre de 2011

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En la siguiente figura, se cumple que las tres circunferencias tienen el mismo centro y sus radios son 8,  $x$  y 17, siendo  $x$  el radio de la circunferencia intermedia. Si el área de la región sombreada  $A$  es igual al área de la región sombreada  $B$ , halla  $x$ .



2. María estudia en un colegio en el que se califica de 0 a 20 inclusive y en todos los cursos se toman 4 exámenes. En su curso de Matemáticas, obtuvo nota final 16, como media aritmética de las notas de los 4 exámenes. Si en los tres primeros exámenes sus notas estuvieron entre 15 y 19 (inclusive), y el promedio fue obtenido sin aproximar decimales, halla la diferencia entre la mayor y la menor nota que pudo obtener María en el cuarto examen de Matemáticas.
3. Dos amigos, Isauro y Eduardo, caminaban en un puente por donde pasaba una línea férrea. Cuando habían recorrido las dos quintas partes del puente, oyeron el ruido de un tren que se aproximaba al puente por detrás de ellos. Despavoridos, comenzaron a correr, cada uno hacia un extremo diferente del puente. Isauro, que había regresado, consiguió salir del puente en el instante exacto en el que el tren iba a entrar al puente. A su vez, Eduardo, que continuó hacia adelante, consiguió salir del puente en el instante en que el tren también iba a hacerlo. Repuestos del susto, cuando se encontraron, comentaron que esto fue posible porque ambos corrieron a 15 km/h y el tren viajaba a  $x$  km/h. Halla el valor de  $x$ .





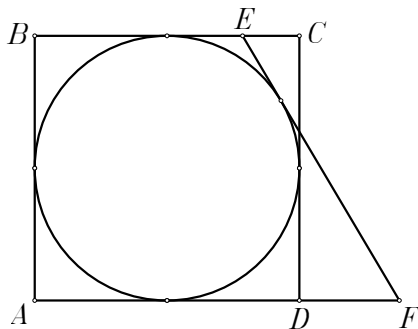
4. Si  $a, b, c, d$  son números reales tales que, para todo ángulo  $\theta$ , se cumple la identidad:

$$\cos(4\theta) = a \cdot \cos^4(\theta) + b \cdot \cos^2(\theta) + c,$$

calcula el valor de  $c^2 - ab$ .

5. Si  $P(x)$  es un polinomio de tercer grado tal que  $P(-2) = -23$ ,  $P(-1) = -5$ ,  $P(0) = 1$  y  $P(3) = 7$ , halla la suma de los coeficientes de  $P(x)$ .

6. En la figura se muestra el cuadrado  $ABCD$  y la circunferencia inscrita en él. El segmento  $EF$  es tangente a la circunferencia y además,  $EC = 2$  y  $DF = 3$ . Calcula la longitud del diámetro de la circunferencia.



7. Sea  $N = \overline{abc}$  un entero positivo de tres dígitos distintos entre sí, divisible por  $a + b + c$  pero no por 3. Determina la cantidad de valores diferentes que puede tomar:

$$\frac{N}{a + b + c}.$$

8. En un club, cada socio debe elegir 4 actividades de un total de 6 disponibles, de tal manera que no haya 2 socios que elijan las mismas 4 actividades ni tampoco haya 2 socios que compartan exactamente 2 actividades. ¿Cuántos socios como máximo puede tener el club?
9. Sea  $M$  el mayor valor que puede tomar la expresión  $\sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ , siendo  $x$  un número real. Halla  $M^2$ .
10. Se dispone de 7 cajas, cada una con 5 bolas en su interior. Se desea colorear cada una de las bolas, de tal manera que en una caja no aparezca dos veces el mismo color, y cada par de colores aparezca en a lo más una caja. ¿Cuántos colores se necesita como mínimo?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio  
de Educación

VIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA  
(ONEM 2011)



Sociedad Matemática  
Peruana

Cuarta Fase - Nivel 3

6 de noviembre de 2011

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
  - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
  - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
- 

**Problema 1.** Decimos que un entero positivo es *irregular* si dicho número no es múltiplo de ninguno de sus dígitos. Por ejemplo, 203 es irregular porque 203 no es múltiplo de 2, no es múltiplo de 0 y no es múltiplo de 3. Considera un conjunto formado por  $n$  enteros positivos consecutivos. Si todos los números de ese conjunto son irregulares, determina el mayor valor posible de  $n$ .

**Problema 2.** Si  $\alpha, \beta, \gamma$  son ángulos cuyas medidas en radianes pertenecen al intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , tales que:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma = 1,$$

calcula el mínimo valor posible de  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ .

**Problema 3.** Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo, recto en  $B$ . Se trazan las bisectrices interiores  $CM$  y  $AN$  que se intersecan en  $I$ . Luego, se construyen los paralelogramos  $AMIP$  y  $CNIQ$ . Si  $U$  y  $V$  son los puntos medios de los segmentos  $AC$  y  $PQ$ , respectivamente, demuestra que  $UV$  es perpendicular a  $AC$ .

**Problema 4.** Una ficha de *dominó* es una pieza rectangular de  $1 \times 2$  (ó de  $2 \times 1$ ); es decir, formada por dos cuadraditos. Se tiene un tablero de  $8 \times 8$ , tal que cada ficha de dominó puede cubrir exactamente dos de sus casillas. Juan coloca  $n$  fichas de dominó sobre el tablero, de manera que cada una cubre exactamente dos cuadraditos del tablero y ya no es posible colocar una ficha más sin que se superponga con alguna de las ya colocadas. Determina el menor valor de  $n$  para el cual la situación descrita es posible.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

## IX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2012)

### Primera Fase - Nivel 3

29 de agosto de 2012

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Un tonel lleno de vino tiene un peso de 265 kg. Cuando está hasta la mitad de su capacidad pesa 160 kg. ¿Cuánto pesa el tonel vacío?  
A) 40 kg                      B) 45 kg                      C) 50 kg                      D) 55 kg                      E) 60 kg
2. Un alumno dio un examen que consistía de 3 partes. En la primera parte había 25 preguntas y él contestó correctamente el 60 %; en la segunda parte había 30 preguntas y él contestó correctamente el 70 %; en la tercera parte había 45 preguntas y él contestó correctamente el 80 %. ¿Qué porcentaje del total de preguntas del examen contestó correctamente el alumno?  
A) 68 %                      B) 70 %                      C) 72 %                      D) 74 %                      E) 76 %
3. Juan tiene en su maletín tres monedas de 2 soles y muchas monedas de 5 soles. Si quiere pagar una cuenta sin recibir vuelto, ¿cuál de las siguientes cantidades no podría pagar?  
A) 35                      B) 36                      C) 37                      D) 38                      E) 39
4. Calcula el valor de 
$$\frac{\tan 35^\circ \cdot \tan 55^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 65^\circ}{\cot 25^\circ \cdot \cot 40^\circ \cdot \cot 45^\circ \cdot \cot 50^\circ}$$
  
A)  $\sqrt{2}$                       B) 1                      C)  $\sqrt{3}$                       D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       E)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. ¿Qué dígito debemos borrar del número 43620 para que el número de 4 dígitos que quede sea múltiplo de 105?  
A) 4                      B) 3                      C) 6                      D) 2                      E) 0

### Primera Fase - Nivel 3

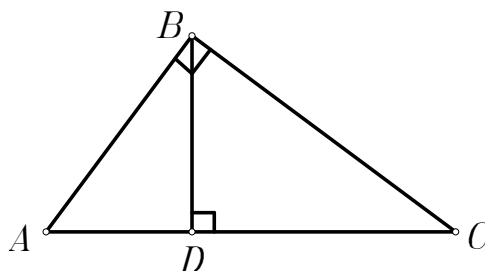
6. Don José tiene en su corral patos y conejos. Al contarlos se dio cuenta de que la cantidad de conejos menos la cantidad de patos es igual a la mitad del total de animales en su corral. ¿Cuál es la razón entre el número de conejos y el número de patos?

A)  $\frac{3}{2}$                       B) 2                      C)  $\frac{5}{2}$                       D) 3                      E) 4

7. Un triángulo rectángulo tiene ángulos agudos  $\theta$  y  $\alpha$ . Si  $\sin \theta \cdot \tan \alpha = \frac{1}{3}$ , calcula el valor de  $\cot \alpha$ .

A)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       B)  $\sqrt{2}$                       C)  $2\sqrt{2}$                       D) 2                      E) 4

8. Sea  $ABC$  un triángulo recto en  $B$  y sea  $D$  el pie de la perpendicular trazada desde  $B$  hacia la hipotenusa  $AC$ . Si  $BC = 2AD$ , halla  $\tan C \cdot \cos A$ .



A)  $\frac{1}{4}$                       B)  $\frac{1}{2}$                       C) 1                      D) 2                      E) 4

9. Coloca los dígitos 4, 5, 7, 8 en los cuadraditos de la figura (usando cada dígito exactamente una vez) de tal forma que el cociente sea un número entero. ¿Cuál es la suma de los dígitos de este cociente?

$$\overline{\square\square\square} \div \square$$

A) 5                      B) 4                      C) 6                      D) 8                      E) 9

10. Si  $a, b, c, d$  son enteros positivos tales que  $2a < b$ ,  $3b < c$  y  $4c < d$ , encontrar el menor valor posible de  $d$ .

A) 25                      B) 29                      C) 37                      D) 39                      E) 41

11. Si  $a, b, c, d$  son dígitos tales que  $(\overline{aba})^2 = (\overline{bc})^3$ , calcula el valor de  $a + b + c$ .

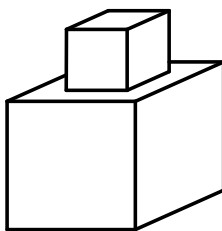
A) 16                      B) 8                      C) 15                      D) 12                      E) 18

12. En una reunión cada persona saludó a por lo menos 2 hombres y a por lo menos 3 mujeres. ¿Cuántas personas había como mínimo en esa reunión?

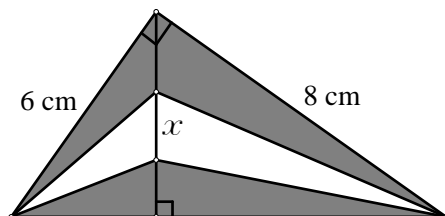
A) 8                      B) 4                      C) 6                      D) 7                      E) 5

### Primera Fase - Nivel 3

13. En la figura mostrada, el cubo más grande tiene 5 m de arista y el más pequeño tiene 3 m de arista y están pegados formando un nuevo sólido. Un artista quiere pintar este sólido (incluyendo a la base del cubo grande), para lo cual utiliza tarros de pintura. Si cada tarro alcanza para pintar  $1 \text{ m}^2$  de superficie, ¿cuántos tarros de pintura necesitará el artista?



- A) 170                      B) 179                      C) 186                      D) 195                      E) 204
14. En la siguiente figura se muestra un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm. En la altura relativa a la hipotenusa se han marcado dos puntos cuya distancia es  $x$ . Si la suma de las áreas de las regiones sombreadas es  $19 \text{ cm}^2$ , calcula el valor de  $x$ .



- A)  $\frac{1}{2} \text{ cm}$                       B) 1 cm                      C) 2 cm                      D)  $\sqrt{5} \text{ cm}$                       E)  $\frac{1}{5} \text{ cm}$
15. Para cada entero positivo  $n$  sea  $f(n)$  el menor entero positivo tal que  $n \cdot f(n)$  es múltiplo de 6. Por ejemplo,  $f(2) = 3$  y  $f(9) = 2$ . Calcula el valor de la suma
- $$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(99) + f(100).$$
- A) 345                      B) 357                      C) 347                      D) 356                      E) 350
16. Si  $a$  y  $b$  son números reales diferentes tales que:

$$a^2 - 1 = b$$

$$b^2 - 1 = a,$$

calcula el valor de  $a^3 + b^3$ .

- A) -2                      B) -1                      C) 0                      D) 1                      E) 2



Sociedad Matemática Peruana

### Primera Fase - Nivel 3

17. Algunas de las casillas de un tablero de  $4 \times 4$  deben ser pintadas. En la figura se muestra dicho tablero y los números que representan la cantidad de casillas que deben estar pintadas en la respectiva fila o columna. Halla el mayor valor posible de  $a + b$ .

|   |   |   |     |   |     |
|---|---|---|-----|---|-----|
|   |   |   |     | → | 3   |
|   |   |   |     | → | 1   |
|   |   |   |     | → | 2   |
|   |   |   |     | → | $b$ |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓   |   |     |
| 3 | 0 | 1 | $a$ |   |     |

- A) 4                      B) 5                      C) 6                      D) 7                      E) 8
18. Un triángulo acutángulo cumple que sus ángulos están en progresión aritmética, además, los pies de sus alturas son los vértices de un triángulo rectángulo. Halla el mayor ángulo del triángulo inicial.
- Nota:* Tenga en cuenta que en cualquier triángulo sus tres alturas pasan por un mismo punto.
- A)  $75^\circ$                       B)  $45^\circ$                       C)  $80^\circ$                       D)  $60^\circ$                       E)  $85^\circ$
19. Sean  $a, b, c$  las raíces de la ecuación  $x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0$ . Sea  $P(x)$  un polinomio cúbico tal que  $P(a) = b + c$ ,  $P(b) = c + a$ ,  $P(c) = a + b$  y  $P(a + b + c) = -16$ . Halla  $P(0)$ .
- A)  $-17$                       B) 11                      C)  $-14$                       D) 14                      E)  $-10$
20. Sea  $ABCD$  es un cuadrilátero convexo con  $\angle ABC = \angle BCD$ ,  $AB = 6$  y  $CD = 8$ . Se sabe que existe un punto  $P$  en el lado  $BC$  tal que  $\angle BAP = \angle PAD$  y  $\angle PDA = \angle PDC$ . Halla  $BC$ .
- A)  $4\sqrt{3}$                       B) 10                      C)  $\frac{48}{7}$                       D)  $8\sqrt{3}$                       E) 14

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

## IX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2012)

### Segunda Fase - Nivel 3

28 de setiembre de 2012

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

**IMPORTANTE: ESTA PRUEBA TIENE VALIDEZ SOLAMENTE SI SE TOMA EL DÍA 28 DE SETIEMBRE.**

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Si  $3! \times 5! \times 7! = n!$ , determine el valor de  $n$ .

*Aclaración:* Recuerde que  $m!$  es el producto de los primeros  $m$  enteros positivos, es decir,  $m! = 1 \times 2 \times \cdots \times m$ .

2. Se sabe que el peso de un objeto en la Luna corresponde a la sexta parte de su peso en la Tierra. La diferencia de los pesos de dos rocas en la Tierra es 4 kg, pero en la Luna juntas pesarían 15 kg. ¿Cuántos kg pesa la roca más pesada en la Tierra?
3. Un día los alumnos le pidieron a su profesor información sobre su edad. Él les respondió de la siguiente manera: Mi edad actual es un múltiplo de 5, hace 2 años fue un múltiplo de 11 y el siguiente año será un cuadrado perfecto menor que 100. ¿Cuál es la edad actual del profesor?

## Segunda Fase - Nivel 3

4. En la pizarra están escritos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ¿Cuántos números debo borrar como mínimo para que el producto de los números que queden en la pizarra sea 630 ?

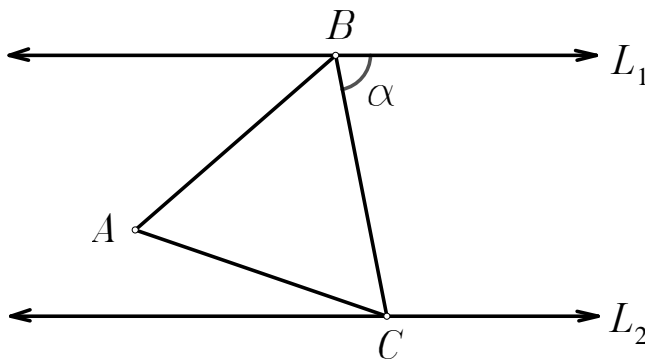
5. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo isósceles, recto en  $B$ , y  $P$  un punto de la hipotenusa  $AC$  tal que  $AP + BP = PC$ . Si definimos  $\alpha = \angle PBA$  y  $\beta = \angle PBC$ , calcule el valor de  $\frac{6\beta}{\alpha}$ .

6. Si  $a$  y  $b$  son números reales tales que

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= 900 \\ a^2 + ab + b^2 &= 45. \end{aligned}$$

Calcula el valor de  $(2a - 2b)^2$ .

7. En la figura se muestran dos rectas paralelas  $L_1$  y  $L_2$ , y un triángulo equilátero  $ABC$ . Si la distancia de  $A$  a la recta  $L_2$  es la mitad de la distancia de  $A$  a la recta  $L_1$ , calcule el valor de  $3 \sec^2 \alpha$ .



8. Determine cuántos enteros positivos  $N$  cumplen las siguientes condiciones a la vez:

- $300 \leq N \leq 500$ .
- Los tres menores divisores positivos de  $N$  son 1, 3 y 9.

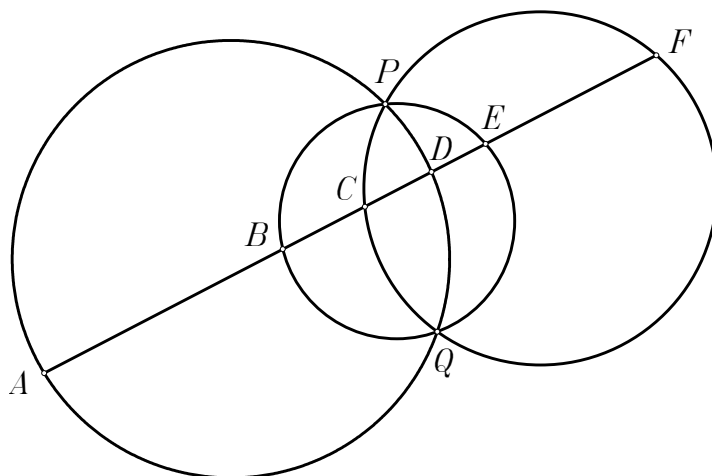


### Segunda Fase - Nivel 3

9. Una ficha de dominó está formada por dos cuadraditos unitarios pegados, es decir, es un rectángulo de  $1 \times 2$  o de  $2 \times 1$ . El siguiente tablero es cubierto con 8 fichas de dominó, luego, se multiplican los dos números que son cubiertos por la misma ficha y se suman estos ocho productos. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar esta suma final?

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 7  | 15 | 6  | 11 |
| 16 | 8  | 14 | 3  |
| 5  | 12 | 2  | 10 |
| 13 | 4  | 9  | 1  |

10. Tres circunferencias pasan por los puntos  $P$  y  $Q$ . Una recta corta a esas circunferencias en los puntos  $A, B, C, D, E$  y  $F$ , como muestra la figura. Si  $AB = 5$ ,  $EF = 4$  y  $AF = 20$ , determina cuántos valores enteros puede tomar  $CD$ .



GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

## IX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2012)

### Tercera Fase - Nivel 3

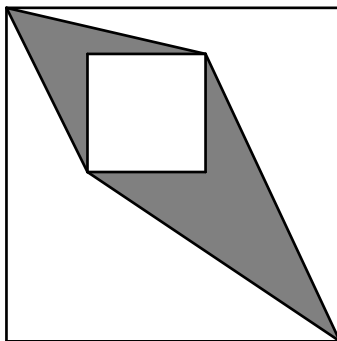
26 de octubre de 2012

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Te recalcamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE LA RESPUESTA DE CADA PROBLEMA  
EN EL ESPACIO CORRESPONDIENTE.  
LA RESPUESTA SIEMPRE ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Don Avarón vende sacos de arroz y de azúcar de 10 kilos cada uno, sin embargo, cada saco pesa en realidad 9.60 kilos. Cierta día un comerciante le compra 7 sacos de arroz y otros de azúcar, al llegar a su tienda pesa nuevamente su mercancía y se da con la sorpresa de que Don Avarón le había dado 6 kilos menos. ¿Cuántos sacos de azúcar compró el comerciante?
2. En la figura mostrada hay dos cuadrados, el más pequeño tiene lado 2 cm, y el más grande tiene lado 7 cm. Los lados del cuadrado pequeño son paralelos a los lados del cuadrado grande. Halla el área sombreada, en  $\text{cm}^2$ .





Sociedad Matemática Peruana

### Tercera Fase - Nivel 3

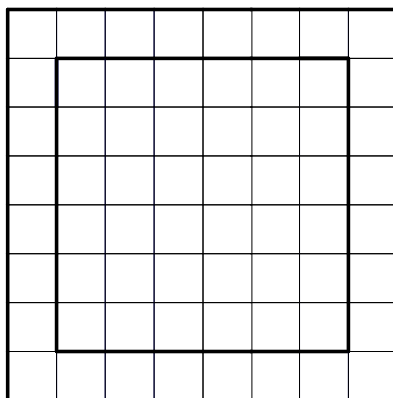
---

3. Jaime es un atleta, en un entrenamiento dio 11 vueltas a la pista atlética, la primera vuelta la hizo en 75 segundos y en cada vuelta mejoró su tiempo en 1 segundo, hasta que se cansó y su tiempo subía 2 segundos por vuelta. Si las 11 vueltas las hizo en 13 minutos y 8 segundos, ¿cuánto tiempo hizo en su vuelta más rápida?

4. Sea  $x$  un ángulo tal que  $(5 \sin x + 5 \cos x - 3)(5 \sin x + 5 \cos x + 3) = 20$ , determina el valor de:

$$(4 + 5 \sin x - 5 \cos x)(5 \sin x - 5 \cos x - 4).$$

5. Un dominó es un rectángulo de  $2 \times 1$  o de  $1 \times 2$ . Pedro cubrió completamente un tablero de  $8 \times 8$  usando 32 dominós y notó que hay  $N$  dominós que están totalmente contenidos en el tablero central de  $6 \times 6$ . Halle el menor valor posible de  $N$  para que la situación descrita sea posible.



6. Para cada número entero  $k$  sea  $f(k)$  el número de soluciones reales de la ecuación:

$$||x| - 4| = k.$$

Por ejemplo,  $f(0) = 2$ , porque la ecuación

$$||x| - 4| = 0$$

tiene exactamente dos soluciones reales: 4 y  $-4$ .

¿Cuántos valores diferentes puede tomar  $f(k)$ ?

7. ¿Cuántos enteros positivos, menores que 130, tienen exactamente cuatro divisores compuestos?

*Aclaración:* Recuerde que un número compuesto es aquel que tiene más de dos divisores positivos. Así por ejemplo, el número 12 tiene exactamente tres divisores compuestos: 4, 6 y 12.



Sociedad Matemática Peruana

### Tercera Fase - Nivel 3

---

8. Sea  $ABCDE$  un pentágono convexo, donde  $ABDE$  es un rombo y  $\angle ABC = \angle CDE = 135^\circ$ . Sean  $M$  y  $N$  los puntos de intersección de  $AC$  y  $EC$  con  $BD$  respectivamente. Si  $BM = 10$  y  $ND = 70$ , halle  $MN$ .

9. Se tiene los siguientes números en la pizarra:

1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 16.

Una operación consiste en elegir dos números  $a$  y  $b$  escritos en la pizarra, borrarlos, y escribir en su lugar el número  $\frac{a+4b}{9}$  o el número  $\frac{4a+b}{9}$ . Después de 15 operaciones sólo va a quedar un número en la pizarra. Sea  $m$  el menor valor que puede tomar dicho número. Halla  $81m$ .

10. Decimos que un entero positivo es *padre de mellizos* si posee dos divisores de la forma  $\overline{ab}$  y  $\overline{ba}$ , con  $a \neq b$ . Determine cuántos número de tres dígitos son padres de mellizos.

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

## IX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2012)

### Cuarta Fase - Nivel 3

25 de noviembre de 2012

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas dudas en los enunciados de los problemas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema vale **25 puntos**.

1. Para cada entero positivo  $n$  cuya descomposición canónica es  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ , definimos  $t(n) = (p_1 + 1) \cdot (p_2 + 1) \cdots (p_k + 1)$ . Por ejemplo,  $t(20) = t(2^2 \cdot 5^1) = (2 + 1) \cdot (5 + 1) = 18$ ,  $t(30) = t(2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1) = (2 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (5 + 1) = 72$  y  $t(125) = t(5^3) = (5 + 1) = 6$ .

Decimos que un entero positivo  $n$  es *especial* si  $t(n)$  es un divisor de  $n$ . ¿Cuántos divisores positivos del número  $546^{10}$  son especiales?

2. Sean  $x, y$  números reales no nulos que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3.$$

Determine todos los valores que puede tomar la expresión  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

3. Una *ficha de dominó* es un rectángulo de  $1 \times 2$  ó de  $2 \times 1$ . Diego quiere cubrir completamente un tablero de  $6 \times 6$  usando 18 fichas de dominó. Determine el menor entero positivo  $k$  para el cual Diego puede colocar  $k$  fichas de dominó sobre el tablero (sin que se superpongan) tal que lo que queda del tablero se pueda cubrir de forma única usando las fichas de dominó restantes.
4. En una circunferencia  $\mathcal{S}$  se traza una cuerda  $AB$  y definimos  $M$  como el punto medio del arco  $AB$ . Sea  $P$  un punto del segmento  $AB$  distinto de su punto medio. La prolongación del segmento  $MP$  corta a  $\mathcal{S}$  en  $Q$ . Sea  $\mathcal{S}_1$  la circunferencia que es tangente a los segmentos  $AP$  y  $MP$ , y también es tangente a  $\mathcal{S}$ ; y sea  $\mathcal{S}_2$  la circunferencia que es tangente a los segmentos  $BP$  y  $MP$ , y también es tangente a  $\mathcal{S}$ . Las rectas tangentes exteriores comunes a las circunferencias  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  se cortan en  $C$ . Pruebe que  $\angle MQC = 90^\circ$ .

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

## X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

### Primera Fase - Nivel 3

23 de agosto de 2013

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. El número 2013 se puede expresar como el producto de tres números primos. Halla la diferencia entre el mayor y el menor de esos números primos.
- A) 9                      B) 41                      C) 50                      D) 54                      E) 58

2. Si  $\theta$  es un ángulo agudo tal que  $\sec \theta = \frac{5}{4}$ , halla el valor numérico de

$$\frac{2 \operatorname{sen} 30^\circ + 3 \operatorname{csc} \theta}{\sqrt{2} \cos 45^\circ + \sqrt{3} \cot 60^\circ}.$$

- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

3. En la Olimpiada Nacional Escolar de Biología (ONEB) participan grupos de tres estudiantes. Para que un grupo de estudiantes sea aceptado en la Olimpiada se debe cumplir que el promedio de sus edades al momento de la inscripción debe ser estrictamente menor que 15. Raúl y Saúl son dos amigos cuyas edades son 13 y 15, respectivamente, y quieren participar en la Olimpiada pero necesitan conseguir un estudiante más para que juntos formen un grupo, ¿cuál es la edad máxima que puede tener este estudiante?

- A) 17                      B) 16                      C) 15                      D) 14                      E) 13

4. Kevin tiene en total 20 monedas, entre monedas de S/. 5 y de S/. 2. Si la cantidad de monedas de cada valor se intercambian, la cantidad total de dinero aumentaría en S/. 18. ¿Cuánto dinero tenía Kevin al inicio?

- A) S/. 61                      B) S/. 79                      C) S/. 85                      D) S/. 59                      E) S/. 48



### Primera Fase - Nivel 3

5. Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de los enteros positivos que son múltiplos de 3; y  $\mathcal{B}$  el conjunto de los enteros positivos que son múltiplos de 6. Determine cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- $1002 \in \mathcal{B}$ .
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ .
- $2013 \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ .
- $18 \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ .

A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

6. Se tiene un triángulo rectángulo  $ABC$ , recto en  $B$ . Si se cumple que:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \tan C}{\tan A + \sec C} = \frac{1}{2},$$

determina el valor de  $\tan A$ .

A) 1                      B)  $\sqrt{3}$                       C) 2                      D)  $\frac{1}{2}$                       E) 3

7. Sean  $a$  y  $b$  números reales positivos tales que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ . Halla el valor numérico de  $\frac{a+b}{a-b}$

A)  $\sqrt{2}$                       B)  $\sqrt{3}$                       C) 2                      D) 3                      E)  $\sqrt{5}$

8. El profesor le dijo a José que simplifique la siguiente expresión:

$$M = 4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{97 - 56\sqrt{3}},$$

después de mucho esfuerzo consiguió simplificar la expresión, y se sorprendió al darse cuenta que  $M$  es un número entero, ¿cuál es ese número?

A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

9. Ángel, Benjamín, Carlos, Daniel y Ernesto son cinco sospechosos de haber robado un reloj de oro. El juez, luego de haber visto el video de seguridad de la tienda, sabe que el ladrón actuó solo. Luego del interrogatorio algunas de las respuestas fueron:

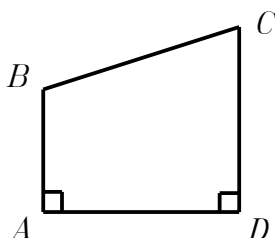
- Ángel: Yo no robé el reloj.
- Benjamín: Carlos robó el reloj.
- Carlos: Daniel es inocente.
- Daniel: Benjamín robó el reloj.
- Ernesto: Yo no robé el reloj.

Si el ladrón fue el único que mintió, ¿quién es el ladrón?

A) Ángel                      B) Benjamín                      C) Carlos                      D) Daniel                      E) Ernesto

Primera Fase - Nivel 3

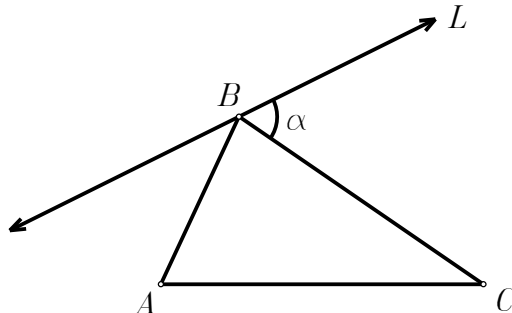
10. En la figura mostrada,  $ABCD$  es un cuadrilátero tal que  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son perpendiculares a  $\overline{AD}$ , con  $AB + CD = BC$ ,  $AB < CD$  y  $AD = 8$ . Halla el valor de  $AB \cdot CD$ .



- A) 16                      B) 8                      C) 4                      D) 2                      E) 1
11. En una bolsa negra hay 3 canicas rojas y 2 azules. Mateo extrae de la bolsa una canica, y después Alfonso extrae otra canica, ¿cuál es la probabilidad de que las canicas extraídas sean de colores diferentes?
- A)  $\frac{1}{2}$                       B)  $\frac{3}{4}$                       C)  $\frac{2}{5}$                       D)  $\frac{3}{5}$                       E)  $\frac{2}{3}$
12. Encuentra el número de pares ordenados  $(a, b)$  de enteros positivos tales que:

$$1 < a < b + 2 < 13.$$

- A) 45                      B) 55                      C) 65                      D) 144                      E) 90
13. Sea  $ABC$  un triángulo cuyos lados son  $AB = 8$ ,  $BC = 15$  y  $AC = 17$ . Se traza una recta  $L$  que pasa por  $B$  y que no corta al triángulo. Si la distancia de  $A$  a la recta  $L$  es a la distancia de  $C$  a la recta  $L$  como 2 es a 5, determine el valor de  $\tan \alpha$ .



- A) 1                      B)  $\frac{4}{3}$                       C)  $\frac{3}{4}$                       D) 2                      E)  $\frac{3}{2}$
14. Sean  $a, b, c$  números reales tales que

$$a - 7b + 8c = 4$$

$$8a + 4b - c = 7.$$

Determina el valor de  $a^2 - b^2 + c^2$ .

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D)  $\frac{1}{7}$                       E)  $\frac{1}{2}$

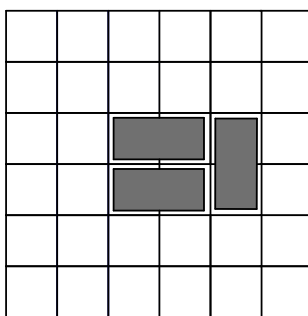




Sociedad Matemática Peruana

### Primera Fase - Nivel 3

15. Sean  $x_1$  y  $x_2$  las raíces de la ecuación  $x^2 - 4x + 1 = 0$ . Halla el valor de  $(x_1^{x_1} + x_2^{x_2})(x_1^{x_2} + x_2^{x_1})$
- A) 180                      B) 200                      C) 196                      D) 194                      E) 16
16. Si al número 2013 se le agregan dos dígitos, uno a la izquierda y otro a la derecha, se forma un número  $N$  de seis dígitos. Por ejemplo, obtenemos el número 820139 si agregamos los dígitos 8 y 9. Si sabemos que  $N$  es múltiplo de 28, halla el menor valor que puede tener la suma de los dígitos de  $N$ .
- A) 13                      B) 14                      C) 15                      D) 6                      E) 7
17. Un entero positivo es múltiplo de 13, ¿cuál es el menor valor que podemos obtener al sumar sus dígitos?
- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5
18. Sea  $D$  un punto sobre el lado  $BC$  de un triángulo  $ABC$ , tal que  $\angle BAD = \angle DAC = 30^\circ$  y  $AB + BD = AC$ . Determina la medida del ángulo  $\angle ACB$ .
- A)  $20^\circ$                       B)  $30^\circ$                       C)  $40^\circ$                       D)  $45^\circ$                       E)  $60^\circ$
19. ¿Cuál es el mayor número de cuatro dígitos distintos tal que al invertir el orden de sus dígitos resulta un cuadrado perfecto? Da como respuesta la suma de los dígitos de dicho número.
- A) 18                      B) 17                      C) 21                      D) 24                      E) 29
20. Timoteo quiere llenar un tablero de  $6 \times 6$  con 18 dominós. Hasta el momento ya ha colocado 3 dominós, como muestra la figura. ¿De cuántas maneras puede llenar el resto del tablero con 15 dominós?



*Aclaración:* Cada dominó cubre exactamente dos cuadraditos del tablero. Ningún dominó puede salirse del tablero.

- A) 494                      B) 429                      C) 519                      D) 469                      E) 559

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

**Importante:**

No publicar está prueba en internet, u otro medio, hasta el día 22 de setiembre.

**Para los encargados de tomar el examen:** Recordar que los alumnos no se pueden llevar los enunciados.



Sociedad Matemática Peruana

## X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

### Segunda Fase - Nivel 3

13 de setiembre de 2013

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Carlos escribió tres números naturales consecutivos y se dio cuenta que el producto de esos tres números es igual a 35 veces uno de ellos. Determine la suma de esos tres números.

*Aclaración:* Considere que el conjunto de los números naturales es  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

2. Sean  $A, B, C$  tres vértices consecutivos de un polígono regular de  $n$  lados. Si  $\angle BAC = 12^\circ$ , determine el valor de  $n$ .
3. Sean  $x, y, z$  números reales tales que

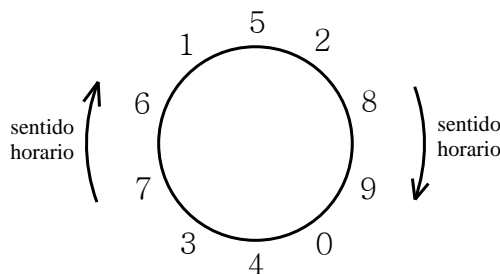
$$\begin{cases} x + y + z = 2013, \\ xy + yz + zx = xyz. \end{cases}$$

Halla el valor de:

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}.$$

### Segunda Fase - Nivel 3

4. Antonio escribe un número  $N$  de 10 dígitos (todos distintos) alrededor de una circunferencia, en sentido horario, como se muestra en la figura.



Según la figura no se puede distinguir donde empezó Antonio a escribir los dígitos de su número  $N$ . Lo que sí se sabe es que  $N$  no es múltiplo de 4 ni de 5, y además  $N - 1$  no es múltiplo de 11, halla el dígito de las decenas de  $N$ .

5. Sea  $f(n, x) = (\cos x^\circ)^n - (\sin x^\circ)^n$ , donde  $n$  es un entero positivo y  $x$  un número real. Por ejemplo, tenemos que  $f(2, 60) = (\cos 60^\circ)^2 - (\sin 60^\circ)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$ . Halla el valor de:

$$\frac{f(4, 23)}{f(2, 11) \cdot f(2, 34)}.$$

6. Los números 1, 2, 4, 6, 7, 10, 13, 21, 22 son distribuidos en las casillas de un tablero de  $3 \times 3$  (un número por casilla), de tal modo que la suma de los números de cualesquiera dos casillas con un lado en común es un número primo. ¿Qué número está en el centro del tablero?
7. Se tiene un tablero de  $5 \times 5$  y en cada casilla está escrito uno de los signos  $+$  o  $-$ , como muestra la figura. Una *operación* consiste en elegir tres casillas que formen un triminó en forma de  $L$  y cambiar los signos de esas tres casillas.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| - | - | - | + | - |
| + | + | + | + | + |
| - | + | - | - | - |
| + | + | - | - | + |
| - | + | - | + | - |

¿Cuántas operaciones como mínimo se necesitan para que todas las casillas del tablero tengan signo  $+$ ?

*Aclaración:* Los triminós en forma de  $L$  son:





Sociedad Matemática Peruana

### Segunda Fase - Nivel 3

---

8. Sea  $ABC$  un triángulo y  $D$  un punto del lado  $AC$  tal que  $CD = 2AB$  y

$$\angle BAC = 2\angle DBC = 4\angle ACB.$$

Halla la medida de  $\angle BAC$  en grados sexagesimales.

9. Sean  $a, b, c$  tres números **enteros** tales que  $a^2 + b^2 + c^2 = 2033$  y  $a + b + c$  es un cuadrado perfecto. Si el menor valor posible de  $a$  es  $-n$ , donde  $n$  es un entero positivo. Halla el valor de  $n$ .
10. Sabemos que para todo  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  se cumple que  $\sin x < x < \tan x$ . Halla el mayor entero positivo  $n$  que tiene la siguiente propiedad:

$$\sin 2x + \tan 2x > nx,$$

para todo  $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ .

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

## X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

### Tercera Fase - Nivel 3

11 de octubre de 2013

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Te recalcamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

ESCRIBE LA RESPUESTA DE CADA PROBLEMA  
EN EL ESPACIO CORRESPONDIENTE.  
LA RESPUESTA SIEMPRE ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Sobre una recta se consideran los cinco puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ , que aparecen en ese orden, tales que  $AC = CD + 6$  y  $CE = BC + 8$ . Determina la distancia entre los puntos medios de los segmentos  $AD$  y  $BE$ .
2. En una academia hay cinco salones y la cantidad de alumnos que hay en cada salón forman una progresión aritmética. El salón menos numeroso tiene 32 alumnos. Cierta día todos los alumnos de cuatro de los salones de dicha academia fueron de excursión y se contó en total 149 alumnos. ¿Cuántos alumnos no fueron a la excursión?
3. Sea  $f(x) = ax + b$  una función lineal, donde  $a$  y  $b$  son números reales con  $a < 0$ . Si el dominio de  $f$  es el intervalo  $[2, 3]$  y su rango es el intervalo  $[5a - 5b, a + 4b]$ , determina el valor de  $\frac{a}{b}$ .



### Tercera Fase - Nivel 3

---

4. ¿Cuántos números de la siguiente lista

$$2^2 \times 3, \quad 2^3 \times 4, \quad 2^4 \times 5, \quad \dots, \quad 2^{2012} \times 2013$$

son cuadrados perfectos?

5. Una ensambladora de autos tiene dos máquinas. La máquina 1 puede ensamblar tres autos por hora pero consume 1000 kw de energía. La máquina 2 puede ensamblar cuatro autos por hora pero consume 2000 kw de energía. Por cuestiones técnicas, la máquina 1 puede estar encendida a lo más 8 horas al día, la máquina 2, a lo más 6 horas; pero ambas máquinas no pueden trabajar al mismo tiempo. ¿Cuántos autos se pueden ensamblar como máximo en un día trabajando de 8 am a 8 pm, sabiendo además que las máquinas no pueden consumir juntas más de 17 000 kw de energía?
6. Sea  $ABC$  un triángulo equilátero. En los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  tomamos los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$ , respectivamente, tales que  $DE$  es perpendicular a  $BC$ ,  $EF$  es perpendicular a  $AC$  y además  $DB = EF + FC$ . Si  $\angle EDF = \alpha$ , determina el valor de  $60 \sec^2 \alpha$ .
7. Un entero positivo  $N$  es llamado *decimito* si se cumple que cada elemento del conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  se puede escribir como  $a + b$ , donde  $a$  y  $b$  son dígitos de  $N$ , no necesariamente diferentes. Determina el menor número decimito y da como respuesta la suma de sus dígitos.
8. Sean  $x, y, z$  ángulos agudos tales que

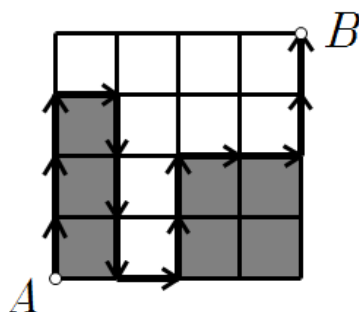
$$\begin{aligned}\sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2}, \\ \sin y \cdot \cos z &= \frac{1}{\sqrt{10}}, \\ \sin z \cdot \cos x &= \frac{2}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Sea  $M$  la suma de todos los posibles valores que puede tomar el producto  $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ . Halla  $100M^2$ .

### Tercera Fase - Nivel 3

9. En un tablero de  $4 \times 4$ , sea  $A$  su vértice inferior izquierdo y  $B$  su vértice superior derecho. Considere todos los caminos que empiezan en  $A$  y terminan en  $B$  que pasan por las líneas de la cuadrícula y que no pasan dos veces por el mismo punto, sabiendo que sólo se puede ir hacia la derecha ( $\rightarrow$ ), hacia arriba ( $\uparrow$ ) o hacia abajo ( $\downarrow$ ). Para cada camino, definimos su *área* como la cantidad de casillas que hay debajo de él. ¿Cuántos caminos cumplen que su área es múltiplo de 4 ó de 5?

*Ejemplo:* El siguiente camino tiene área 7.



Tenga en cuenta que 0 es múltiplo de cualquier entero positivo.

10. Sea  $S$  una semicircunferencia de diámetro  $AB$ . Sea  $C$  un punto del segmento  $AB$  (distinto de los extremos) y sean  $S_1$  y  $S_2$  las semicircunferencias de diámetros  $AC$  y  $BC$  (hacia el mismo lado de  $S$ ), respectivamente. Una circunferencia es tangente a  $S, S_1, S_2$  en los puntos  $X, M, N$ , respectivamente. Cuando  $C$  varía a lo largo de todo el segmento  $AB$ , el ángulo  $\angle MXN$  recorre el intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Halla el valor de  $100(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**





Sociedad Matemática Peruana

## X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

### Cuarta Fase - Nivel 3

17 de noviembre de 2013

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
  - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
  - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
- 

1. Definimos el polinomio  $P(x) = 2014x^{2013} + 2013x^{2012} + \dots + 4x^3 + 3x^2 + 2x$ . Halla el mayor divisor primo de  $P(2)$ .

2. Los enteros positivos  $a, b, c$  son tales que

$$\begin{aligned}MCD(a, b, c) &= 1, \\MCD(a, b + c) &> 1, \\MCD(b, c + a) &> 1, \\MCD(c, a + b) &> 1.\end{aligned}$$

Determina el menor valor posible de  $a + b + c$ .

*Aclaración:*  $MCD$  significa máximo común divisor.

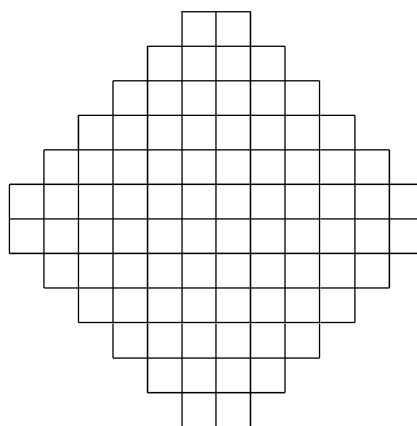
3. Sea  $P$  un punto en el interior del triángulo equilátero  $ABC$  tal que

$$6\angle PBC = 3\angle PAC = 2\angle PCA.$$

Halla la medida del ángulo  $\angle PBC$ .

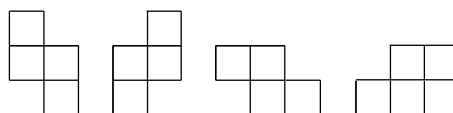
### Cuarta Fase - Nivel 3

4. El siguiente tablero es cubierto completamente con dominós de manera arbitraria.



- Prueba que podemos pintar 21 dominós de tal modo que no haya dos dominós pintados formando un *S*-tetraminó.
- ¿Cuál es el mayor entero positivo  $k$  para el cual siempre es posible pintar  $k$  dominós (sin importar cómo se llene el tablero) de tal modo que no haya dos dominós pintados formando un *S*-tetraminó?

*Aclaración:* Un *dominó* es un rectángulo de  $1 \times 2$  ó de  $2 \times 1$ ; los *S*-tetraminós son las figuras de los siguientes tipos:



**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Sociedad Matemática Peruana

## XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

### Primera Fase - Nivel 3

10 de julio de 2014

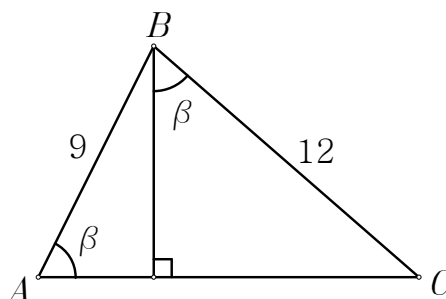
- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
- 

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. El presidente del Perú dio un discurso de 1 hora y media de duración, el cual comenzó a las 5 p. m. en la ciudad de París. El discurso fue transmitido en vivo en la ciudad de Lima. Si París tiene 7 horas de adelanto respecto a Lima, ¿a qué hora terminó el discurso según la hora de Lima?  
A) 5:30 a. m.      B) 8:30 a. m.      C) 11:30 a. m.      D) 2:30 p. m.      E) 4:30 p. m.
2. En un pueblo sólo se presentaron dos candidatos a la alcaldía. Después de unos días de las elecciones se anunció que el ganador recibió 55 % de los 1700 votos computables (no se consideran votos en blanco ni viciados) y el otro candidato recibió los votos restantes. ¿Cuántos votos más recibió el ganador que el otro candidato?  
A) 85      B) 340      C) 170      D) 850      E) 255
3. Si el doble de  $8^n$  es igual a  $4^{1007}$ , determine el valor de  $n$ .  
A) 335      B) 671      C) 1006      D) 1342      E) 2013
4. Cuatro hermanos, que conforman un grupo de música, ganaron un premio de 10 000 soles en un concurso y se lo repartieron, según el trabajo realizado, de la siguiente manera: El segundo recibió la mitad de lo que recibió el primero, el tercero recibió la mitad de lo que recibió el segundo y el cuarto recibió 900 soles. ¿Cuántos soles recibió el primero?  
A) 5200      B) 1800      C) 3600      D) 1300      E) 2600

## Primera Fase - Nivel 3

5. En el triángulo  $ABC$  se ha trazado la altura desde el vértice  $B$ . Si  $AB = 9$  y  $BC = 12$ , determine la cotangente de  $\beta$ .



- A)  $\frac{3}{4}$       B)  $\frac{4}{3}$       C)  $\frac{3}{5}$       D)  $\frac{5}{3}$       E)  $\frac{4}{5}$
6. Se dice que una persona es *mayor de edad* si tiene 18 o más años. Si Arturo no es mayor de edad entonces:
- A) Arturo tiene 18 años.  
 B) Arturo tiene menos de 17 años.  
 C) Arturo tiene 17 o más años.  
 D) Arturo tiene 17 años.  
 E) Arturo tiene 17 o menos años.
7. Sea  $ABC$  un triángulo tal que  $\angle BAC = 40^\circ$  y  $\angle ACB = 20^\circ$ . Determine la medida del ángulo agudo que forman la bisectriz del ángulo  $\angle ABC$  con la mediatriz del segmento  $AC$ .
- Aclaración:* Recuerde que la mediatriz del segmento  $PQ$  es la recta que es perpendicular a  $PQ$  y que pasa por el punto medio del segmento  $PQ$ .
- A)  $10^\circ$       B)  $15^\circ$       C)  $20^\circ$       D)  $25^\circ$       E)  $30^\circ$
8. Si  $x, y, z$  son números reales tales que:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 4, \\x - y + z &= 0, \\x^2 + y^2 + z^2 &= 14.\end{aligned}$$

Determine el valor de  $x^4 - y^2 + z^4$

- A) 96      B) 86      C) 98      D) 66      E) 78

### Primera Fase - Nivel 3

9. Al inicio de una capacitación había 240 profesores de los cuales el 80 % eran profesores de matemática. Pasadas unas horas, algunos profesores de matemática se tuvieron que retirar (pero no se retiraron profesores de otros cursos). Al final de la capacitación resultó que el 75 % del total eran profesores de matemática. ¿Cuántos profesores en total hubo al final de la capacitación?

A) 225                      B) 235                      C) 180                      D) 228                      E) 192

10. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  ángulos agudos tales que

$$\operatorname{sen}(2\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2.$$

Determine el valor de  $\alpha + \beta$ .

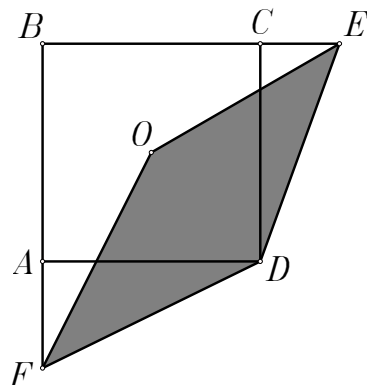
A)  $0^\circ$                       B)  $30^\circ$                       C)  $60^\circ$                       D)  $90^\circ$                       E)  $120^\circ$

11. ¿Cuál es el coeficiente de  $x^{99}$  al desarrollar el siguiente producto, que tiene 100 factores?

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdots (x - 100)$$

A) 0                      B) 100                      C)  $-100$                       D) 5050                      E)  $-5050$

12. En la figura se muestra un cuadrado  $ABCD$  de lado 4 y centro  $O$ ; se han tomado los puntos  $E$  y  $F$  en las prolongaciones de los lados  $BC$  y  $BA$ , respectivamente, de tal forma que  $OEDF$  es un rombo, ¿cuál es el perímetro de dicho rombo?



*Aclaración:* Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales.

A) 18                      B) 16                      C)  $8\sqrt{5}$                       D)  $4\sqrt{7}$                       E) 20

13. Si  $x$  es un número entero positivo, ¿cuál de las siguientes expresiones no puede ser un número entero?

A)  $\sqrt{x-1}$                       B)  $\sqrt{x^2-1}$                       C)  $\frac{x+4}{x-2}$                       D)  $\frac{x+4}{x+2}$                       E)  $\frac{5}{x+1}$

### Primera Fase - Nivel 3

14. Tengo dos monedas, ambas tienen un lado dorado y un lado plateado. Una es normal, es decir, la probabilidad de que salga el lado dorado al lanzarla es  $\frac{1}{2}$  y de que salga el lado plateado es  $\frac{1}{2}$ . La otra moneda está trucada y la probabilidad de que salga el lado dorado al lanzarla es  $\frac{3}{4}$  y la probabilidad de que salga el lado plateado es  $\frac{1}{4}$ . ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar ambas monedas a la vez los dos lados que salgan sean del mismo color?

A)  $\frac{1}{8}$                       B)  $\frac{1}{2}$                       C)  $\frac{1}{4}$                       D)  $\frac{3}{4}$                       E)  $\frac{3}{8}$

15. Si  $\theta$  es un ángulo agudo, simplifique la siguiente expresión:

$$\sqrt{\cos^4 \theta + 4 \sin^2 \theta} + \sqrt{\sin^4 \theta + 4 \cos^2 \theta}.$$

A)  $1 + 2(\sin \theta + \cos \theta)$   
 B)  $3(\sin \theta + \cos \theta)$   
 C)  $2(\sin \theta + \cos \theta)$   
 D) 3  
 E)  $1 + 2(\sin \theta \cdot \cos \theta)$

16. En el plano cartesiano considere los 9 puntos que tienen coordenadas  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(0,2)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,0)$ ,  $(2,1)$ ,  $(2,2)$ . ¿De cuántas formas se puede escoger 3 de esos 9 puntos de tal forma que esos 3 puntos sean los vértices de un triángulo isósceles?

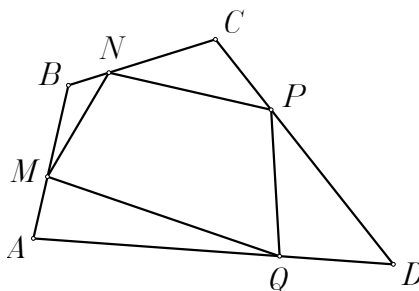
Aclaración: Tenga en cuenta que un triángulo no puede tener sus tres vértices pertenecientes a una misma recta.

A) 32                      B) 20                      C) 36                      D) 28                      E) 40

17. Sean  $M, N, P, Q$  puntos de los lados  $AB, BC, CD, DA$  de un cuadrilátero  $ABCD$  de área 360, tales que

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = \frac{1}{2}.$$

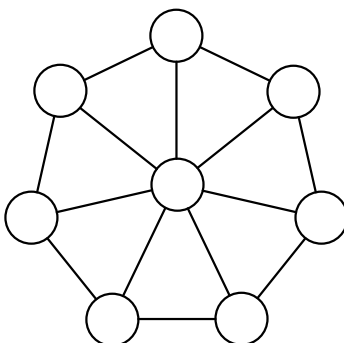
Halle el área del cuadrilátero  $MNPQ$ .



A) 200                      B) 160                      C) 250                      D) 180                      E) 250

### Primera Fase - Nivel 3

18. En cada uno de los círculos de la siguiente figura se debe escribir un entero positivo de tal forma que si dos círculos están unidos por un segmento entonces estos círculos contienen números diferentes.



¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de los 8 números escritos?

- A) 15                      B) 16                      C) 17                      D) 18                      E) 20

19. Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los lados de un triángulo, ¿cuántos de los siguientes enunciados se cumplen necesariamente?

- Existe un triángulo de lados  $a + 2b$ ,  $b + 2c$  y  $c + 2a$ .
- Existe un triángulo de lados  $a + b - c$ ,  $b + c - a$  y  $c + a - b$ .
- Existe un triángulo de lados  $a^2 + bc$ ,  $b^2 + ca$  y  $c^2 + ab$ .
- Existe un triángulo de lados  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$  y  $\sqrt{c}$ .

- A) 0                      B) 2                      C) 4                      D) 1                      E) 3

20. ¿Cuántos subconjuntos no vacíos de  $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$  cumplen que el producto de sus elementos es un múltiplo de 12 ?

- A) 2648                      B) 3712                      C) 3632                      D) 3392                      E) 3648

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Sociedad Matemática Peruana

## XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

### Segunda Fase - Nivel 3

21 de agosto de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados ni tampoco **publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Determine el valor de la siguiente expresión

$$\frac{\cos^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ + 3 \cos^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ}.$$

2. En una caja cerrada hay 10 canicas azules, 11 canicas rojas, 12 canicas amarillas y 13 canicas blancas. ¿Cuántas canicas debemos sacar como mínimo, sin ver, para obtener con seguridad al menos cinco canicas de cada color?

3. Determine el menor entero positivo  $n$  para el cual la suma

$$2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

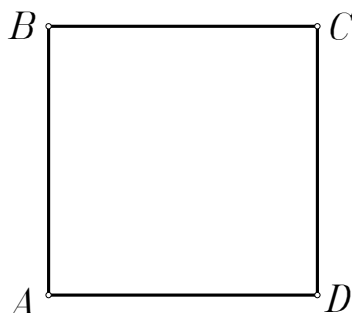
es múltiplo de 567.



### Segunda Fase - Nivel 3

---

4. En una fiesta los asistentes bailan en parejas formadas por un hombre y una mujer, pero en un momento dado no es necesario que todos los asistentes estén bailando. Se observó que cada hombre bailó con exactamente 3 mujeres y cada mujer bailó con exactamente 4 hombres. ¿Cuántos asistentes hay en total si este número está entre 30 y 40?
5. La ecuación  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = -1$  tiene algunas raíces reales. Si  $r$  es la menor raíz real de esa ecuación y  $R$  es la mayor raíz real, determine el valor de  $r + R$ .
6. Un texto antiguo menciona el siguiente acertijo:
- “Tengo tres números distintos del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ , los dos mayores son consecutivos y su suma es divisible por el menor de los tres números, además, si supieras el valor del menor podrías determinar con seguridad los otros dos números. Te reto a que adivines cuáles son mis tres números”.
- Determine la suma de los tres números que resuelven el acertijo.
7. Diremos que un cuadrilátero es *especial* si al menos uno de sus ángulos interiores es mayor o igual que  $135^\circ$ . Se tiene un cuadrado  $ABCD$ :

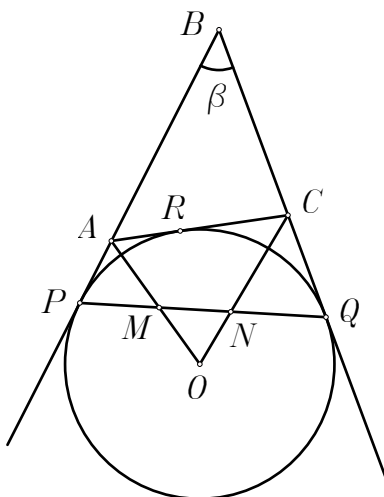


donde se eligen dos puntos  $M$  y  $N$  sobre el lado  $AB$  (con  $M$  entre  $A$  y  $N$ ), los puntos  $P$  y  $Q$  sobre el lado  $BC$  (con  $P$  entre  $B$  y  $Q$ ), los puntos  $R$  y  $S$  sobre el lado  $CD$  (con  $R$  entre  $C$  y  $S$ ) y los puntos  $T$  y  $U$  sobre el lado  $DA$  (con  $T$  entre  $D$  y  $U$ ). Al trazar los segmentos  $MS$ ,  $NR$ ,  $QT$  y  $PU$  el cuadrado queda dividido en 9 cuadriláteros, ¿como máximo cuántos de estos 9 cuadriláteros pueden ser especiales?

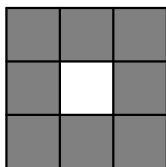
8. Se sabe que el número  $4^{100}$  tiene 61 dígitos. ¿Cuántos dígitos tiene el número  $5^{100}$ ?

## Segunda Fase - Nivel 3

9. En la figura mostrada, la circunferencia de centro  $O$  es tangente a las rectas  $BA$ ,  $BC$  y  $AC$  en los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , respectivamente. Los segmentos  $OA$  y  $OC$  cortan al segmento  $PQ$  en los puntos  $M$  y  $N$ . Si  $PM = 5$ ,  $MN = 6$  y  $NQ = 7$ , determine el valor de  $5 \times 6 \times 7 \times \cos \beta$ .



10. La ficha  $O$ , formada por 8 cuadraditos, se genera al quitar el cuadradito central de un tablero de  $3 \times 3$ . En la siguiente figura están sombreados los 8 cuadraditos de una ficha  $O$ :



¿Cuántos cuadraditos de un tablero de  $10 \times 10$  se deben marcar con el símbolo ★, como mínimo, para asegurar que cualquier ficha  $O$  incluida completamente en el tablero cubra al menos un cuadradito marcado con ★?

*Aclaración:* Cada ficha  $O$  debe cubrir exactamente 8 cuadraditos.

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

## XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

### Tercera Fase - Nivel 3

2 de octubre de 2014

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Desde un reservorio, que abastece de agua a un pueblo, se transportan  $70 \text{ m}^3$  de agua por segundo usando tres tuberías:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . La empresa que administra el reservorio quiere hacer mejoras duplicando la capacidad de dos de las tuberías. Si se duplica la capacidad de las tuberías  $A$  y  $B$  se transportaría  $125 \text{ m}^3$  de agua por segundo. Si se duplica la capacidad de las tuberías  $A$  y  $C$  se transportaría  $115 \text{ m}^3$  de agua por segundo. ¿Cuánto se transportaría (en  $\text{m}^3$  por segundo) si se duplica la capacidad de las tuberías  $B$  y  $C$ ?
2. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  ángulos agudos tales que:

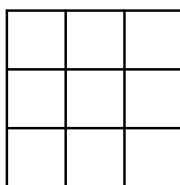
$$\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \frac{8}{7} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \beta + \cos \beta = \frac{7}{5}.$$

Calcule el valor de:

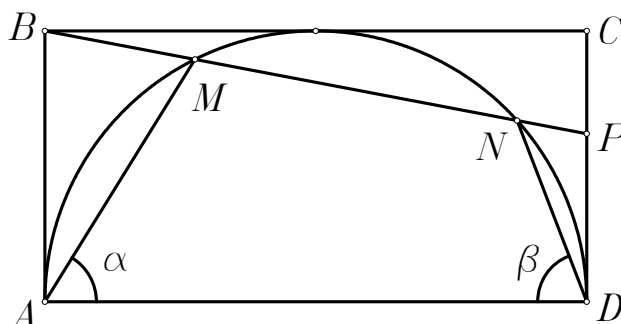
$$10 \cdot [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$$

### Tercera Fase - Nivel 3

3. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 deben ser distribuidos en las casillas de un tablero de  $3 \times 3$ , un número por casilla, de tal modo que la suma de los números ubicados en cualesquiera dos casillas con un lado en común pertenezca siempre al conjunto  $\{9, 10, 11, 12\}$ . Determine la suma de los cuatro números ubicados en las cuatro casillas de las esquinas del tablero.



4. Bruno tiene una tienda de objetos novedosos en la cual ofrece tres productos cuyos precios son 5 soles el primero, 6 el segundo y 7 el tercero. Al cerrar la tienda se dio cuenta de que el 15 % de los objetos vendidos ese día fueron del primer producto. Si la recaudación total de ese día fue de 250 soles, ¿cuántos objetos del segundo producto se vendieron?
5. Un número de 4 dígitos es múltiplo de 16, determine el mayor valor que puede tomar la suma de los dígitos de dicho número.
6. Los enteros positivos  $a$  y  $b$  cumplen que  $a^a$  es un divisor de  $b^b$ , pero  $a$  no es un divisor de  $b$ . ¿Cuál es el menor valor posible de  $a + b$ ?
7. En la figura mostrada  $ABCD$  es un rectángulo,  $AD$  es el diámetro de la semicircunferencia (la cual es tangente al lado  $BC$ ). El segmento  $BP$  corta a la semicircunferencia en los puntos  $M$  y  $N$ . Sea  $\alpha = \angle MAD$  y  $\beta = \angle NDA$ . Si  $\tan \beta = 3$ , determine el valor de  $120 \cdot \tan \alpha$ .





Sociedad Matemática Peruana

### Tercera Fase - Nivel 3

---

8. Si  $ABCD$  es un cuadrilátero convexo tal que  $\angle DAC = 30^\circ$ ,  $\angle ADB + 2\angle ADC = 360^\circ$  y  $\angle ACD = \angle ACB$ , determine la medida de  $\angle ABC$  (en grados sexagesimales).
9. Sea  $P(x)$  un polinomio cuadrático tal que  $-2 \leq P(x) \leq 5$ , para todo  $x \in [2, 4]$ . Determine el mayor valor posible de  $P(-1)$ .  
Aclaración:  $[2, 4]$  representa al intervalo cerrado de extremos 2 y 4.
10. La siguiente secuencia de números está conformada por todos los números naturales cuyo producto de dígitos es una potencia de 2 pero no es una potencia de 4, ordenados de forma creciente:

$2, 8, 12, 18, 21, \dots$

Así por ejemplo, el número 2 ocupa la posición 1, el número 8 ocupa la posición 2, el número 12 ocupa la posición 3, y así sucesivamente. ¿Qué número ocupa la posición 2014? Dé como respuesta la suma de sus dígitos.

## GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

## XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

### Cuarta Fase - Nivel 3

9 de noviembre de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

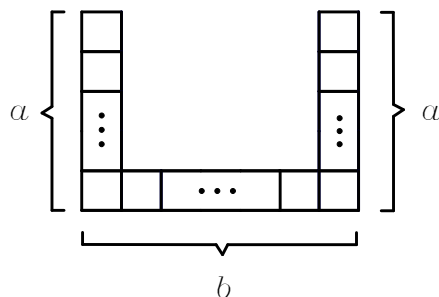
1. Encontrar todas las ternas  $(\alpha, \beta, \theta)$  de ángulos agudos tales que las siguientes desigualdades se cumplan a la vez

$$(\sin \alpha + \cos \beta + 1)^2 \geq 2(\sin \alpha + 1)(\cos \beta + 1),$$

$$(\sin \beta + \cos \theta + 1)^2 \geq 2(\sin \beta + 1)(\cos \theta + 1),$$

$$(\sin \theta + \cos \alpha + 1)^2 \geq 2(\sin \theta + 1)(\cos \alpha + 1).$$

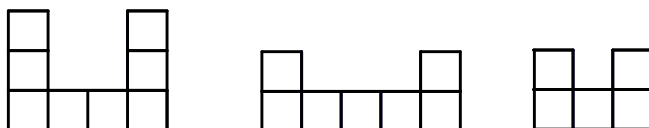
2. Una ficha  $U$  está formada por cuadraditos de  $1 \times 1$  y tiene la siguiente forma:



donde hay dos hileras verticales de  $a$  cuadraditos, una horizontal de  $b$  cuadraditos y además  $a \geq 2$  y  $b \geq 3$ . Observe que hay diferentes tipos de ficha  $U$ .

### Cuarta Fase - Nivel 3

Por ejemplo, algunos tipos de fichas  $U$  son los siguientes:



Demuestre que para cada entero  $n \geq 6$ , el tablero de  $n \times n$  se puede cubrir completamente con fichas  $U$ , sin que haya huecos y sin que haya dos fichas que se superpongan.

*Aclaraciones:* Las fichas  $U$  se pueden rotar. En el cubrimiento se puede usar cualquier cantidad de fichas de cada tipo.

3. a) Sean  $a, b, c$  enteros positivos tales que  $ab + b + 1$ ,  $bc + c + 1$  y  $ca + a + 1$  son divisores del número  $abc - 1$ , demuestre que  $a = b = c$ .  
 b) Encuentre todas las ternas  $(a, b, c)$  de enteros positivos tales que el producto

$$(ab - b + 1)(bc - c + 1)(ca - a + 1)$$

es un divisor del número  $(abc + 1)^2$ .

4. Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo de circuncentro  $O$ , sobre los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  se toman los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$ , respectivamente, de tal manera que  $BDEF$  es un paralelogramo. Suponiendo que

$$DF^2 = AE \cdot EC < \frac{AC^2}{4},$$

demuestre que las circunferencias circunscritas a los triángulos  $FBD$  y  $AOC$  son tangentes entre sí.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Sociedad Matemática Peruana

## XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

### Primera Fase - Nivel 3

19 de junio de 2015

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - **Importante: Se informa a todos los alumnos y personal encargado que está prohibido divulgar esta prueba, especialmente por internet, hasta el día 28 de junio. A partir del 29 de junio las pruebas estarán publicadas en la página web del Ministerio de Educación.**
- 

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Andrea, Berta, Claudia y Diana tienen cuadernos en sus mochilas. Una de ellas tiene un cuaderno, otra tiene dos, otra tiene tres y la última tiene cuatro cuadernos en su mochila. Andrea, Diana y Berta tienen 7 cuadernos en total. Claudia y Diana tienen 5 cuadernos en total. Si Berta tiene más cuadernos que Andrea, ¿cuántos cuadernos tienen Claudia y Berta en total?  
A) 3                      B) 4                      C) 5                      D) 6                      E) 7
2. Los números  $a, b, c, d, 2b$  son los primeros cinco términos de una progresión aritmética. Si  $a \neq 0$ , calcule el valor de  $\frac{a+b}{c+d}$ .  
A)  $\frac{1}{2}$                       B)  $\frac{2}{3}$                       C)  $\frac{3}{5}$                       D)  $\frac{5}{9}$                       E)  $\frac{7}{9}$
3. En un triángulo rectángulo  $ABC$ , recto en  $C$ , denotamos  $\alpha = \angle BAC$  y  $\beta = \angle CBA$ . Si  $\sin \alpha = \cos 23^\circ$ , calcule el valor de  $\frac{\tan(\alpha - 7^\circ)}{\tan(\beta + 7^\circ)}$ .  
A) 2                      B) 1                      C) 3                      D)  $\sqrt{3}$                       E) 6
4. Los números de dos dígitos  $\overline{ab}$  y  $\overline{ba}$  cumplen que  $\overline{ab} - 2$  es múltiplo de 7 y  $\overline{ba} - 1$  es múltiplo de 9, determine el valor de  $a + b$ .  
A) 10                      B) 11                      C) 12                      D) 13                      E) 14



### Primera Fase - Nivel 3

5. La *mediana* de una cantidad impar de números se determina de la siguiente forma: se ordena los números de menor a mayor, y la mediana se define como el número que aparece en la posición central. Por ejemplo, la mediana de los números 2, 5, 2, 1, 4 es 2 porque al ordenar dichos números de menor a mayor obtenemos 1, 2, 2, 4, 5 y el 2 es el que está en la posición central.

Determine cuántos valores diferentes puede tomar la mediana de los nueve números:

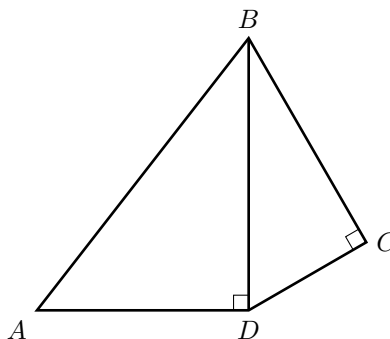
$$1, 11, 12, 5, 8, 13, 5, 5, n,$$

donde  $n$  es un entero positivo.

- A) 2                      B) 3                      C) 4                      D) 5                      E) 6
6. Carlos tiene dos cubos tales que la arista de uno de ellos es mayor que la arista del otro en 2 cm. Al calcular sus superficies totales, se dio cuenta que la diferencia de éstas es  $96 \text{ cm}^2$ . Determine la diferencia de los volúmenes de los cubos de Carlos.
- A)  $26 \text{ cm}^3$               B)  $56 \text{ cm}^3$               C)  $98 \text{ cm}^3$               D)  $152 \text{ cm}^3$               E)  $218 \text{ cm}^3$
7. Determine cuántos enteros positivos  $n$  cumplen la siguiente desigualdad:

$$\frac{n}{20} + \frac{20}{n} < 3 + \frac{1}{3}.$$

- A) 59                      B) 53                      C) 56                      D) 42                      E) 49
8. En el cuadrilátero  $ABCD$  se cumple que  $\angle ADB = \angle DCB = 90^\circ$ ,  $BD = 9$ ,  $DC = 3$  y  $AD = 5\sqrt{2}$ . Calcule la longitud de la diagonal  $AC$ .



- A)  $4\sqrt{7}$                       B)  $7\sqrt{2}$                       C) 8                      D)  $3\sqrt{11}$                       E) 9
9. Hay 100 personas haciendo una fila para entrar a un concierto. En cualquier grupo de 7 personas consecutivas hay siempre 5 mujeres. Si en total hay 30 hombres en la fila, ¿cuántas mujeres hay entre las 10 personas del medio?
- A) 5                      B) 6                      C) 7                      D) 8                      E) 9

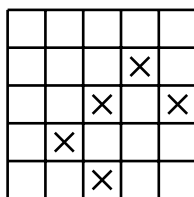
### Primera Fase - Nivel 3

10.  $A, B, C$  son vértices (no necesariamente consecutivos) de un polígono regular de  $n$  lados tales que  $\angle ABC = \frac{80^\circ}{7}$ . Determine el valor de  $n$  sabiendo que  $200 < n < 300$ .

*Aclaración:* Un polígono regular es un polígono que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos interiores de igual medida.

- A) 240                      B) 250                      C) 252                      D) 266                      E) 280

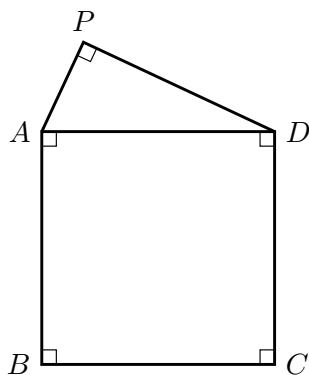
11. El juego de Batalla Naval se juega sobre un tablero de  $5 \times 5$ , los barcos se representan por rectángulos y cada rectángulo está formado por cuadraditos del tablero. Ana y Beto juegan a Batalla Naval. Beto colocó sus 4 barcos que son rectángulos de  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3$ ,  $1 \times 4$  y  $1 \times 5$  sobre el tablero de  $5 \times 5$  (los barcos pueden estar en vertical u horizontal pero no pueden tener casillas en común). Ana no puede ver el tablero, ella solo puede indicar en qué casillas se van a realizar disparos. Luego de hacer los siguientes 5 disparos, Ana no derribó ningún barco de Beto:



¿Cuántos disparos más debe hacer Ana como mínimo para derribar con seguridad todos los barcos de Beto?

- A) 4                      B) 5                      C) 6                      D) 7                      E) 8

12. Exteriormente al cuadrado  $ABCD$  se construye el triángulo rectángulo  $APD$  (recto en  $P$ ), tal que  $AP < PD$  y el área del triángulo  $BPC$  es al área del cuadrado  $ABCD$  como 5 es a 8. Calcule la medida de  $\angle ADP$ .



- A)  $22.5^\circ$                       B)  $30^\circ$                       C)  $15^\circ$                       D)  $24^\circ$                       E)  $18^\circ$



### Primera Fase - Nivel 3

13. Sea  $x$  un ángulo agudo tal que  $\cos^2 x \cdot (1 + \sin x \cos x) = 1$ . Calcule el valor de

$$\frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} - \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}.$$

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 4                      E) 8

14. El entero positivo  $N$  cumple las siguientes dos propiedades:

- El máximo común divisor de  $N$  y 280 es 20.
- $N$  tiene exactamente 15 divisores positivos (incluyendo a 1 y  $N$ ).

Determine la suma de los dígitos de  $N$ .

- A) 2                      B) 3                      C) 7                      D) 4                      E) 1

15. Una *permutación* es una forma de ordenar los elementos de una secuencia. Por ejemplo,  $(2, 1, 6, 5)$  es una permutación de  $(1, 2, 5, 6)$ .

Sea  $(a, b, c, d, e)$  una permutación de  $(1, 2, 3, 4, 5)$ , ¿cuál es el mayor valor que puede tomar el producto  $(a - b)(b - c)(c - d)(d - e)$ ?

- A) 18                      B) 24                      C) 36                      D) 48                      E) 72

16. Decimos que un número de cuatro dígitos distintos  $\overline{abcd}$  es *luminoso* si  $5a + b = 5c + d$ . Por ejemplo 2015 es luminoso ya que todos sus dígitos son distintos y  $5 \times 2 + 0 = 5 \times 1 + 5$ . ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar la suma de los dígitos de un número luminoso?

- A) 20                      B) 22                      C) 24                      D) 26                      E) 28

17. Se pintan de rojo 10 puntos de una circunferencia. Martín traza una cuerda que une dos puntos rojos y Nicolás traza una cuerda que une dos puntos rojos distintos a los de Martín. ¿Cuál es la probabilidad de que estas dos cuerdas se corten?

- A)  $\frac{1}{6}$                       B)  $\frac{3}{4}$                       C)  $\frac{1}{2}$                       D)  $\frac{2}{3}$                       E)  $\frac{1}{3}$

18. En un triángulo rectángulo  $ABC$ , recto en  $B$ , se ubica un punto interior  $T$  y se trazan los segmentos  $TP$ ,  $TQ$  y  $TR$  que tienen igual longitud y son perpendiculares a los lados del triángulo ( $P$  en  $AB$ ,  $Q$  en  $BC$  y  $R$  en  $AC$ ). En cada uno de los cuadriláteros  $TQBP$ ,  $TPAR$  y  $TRCQ$  se inscribe una circunferencia (tangente a los cuatro lados del cuadrilátero correspondiente) cuyos radios son 6, 9 y  $x$ , respectivamente. Halle el valor de  $x$ .

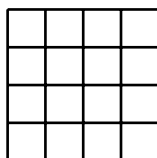
- A) 8                      B) 9                      C) 10                      D) 12                      E) 15



Sociedad Matemática Peruana

### Primera Fase - Nivel 3

19. Se tiene un tablero de  $4 \times 4$  como el mostrado. En cada casilla del tablero se escribe un número entero de tal modo que en cada fila y en cada columna haya al menos dos números iguales. ¿Cuál es la mayor cantidad de números distintos que puede haber en el tablero?



- A) 8                      B) 10                      C) 9                      D) 12                      E) 11
20. Sean  $x, y, z$  reales positivos tales que

$$x^2y + y^2 = 2z,$$

$$y^2z + z^2 = 3x,$$

$$z^2x + x^2 = 4y.$$

Calcule el valor de  $xyz$ .

- A) 1                      B) 2                      C)  $\frac{3}{2}$                       D) 3                      E)  $\frac{3}{4}$

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Sociedad Matemática Peruana

## XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

### Segunda Fase - Nivel 3

17 de julio de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, pero no puedes **publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

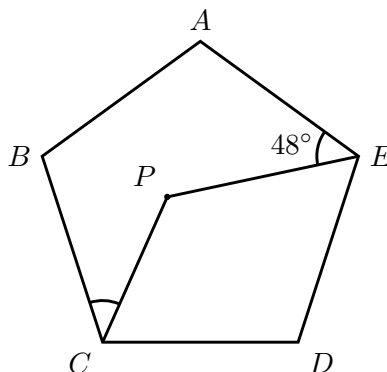
---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Tres amigos: Roberto, Samuel y Tomás deciden pagar la cuenta de una cena de manera proporcional a su edad. Roberto tiene 24 años y pagó el 32 % de la cuenta. Si Samuel tiene 21 años, ¿cuántos años tiene Tomás?
2. Para seleccionar a la delegación peruana en la Olimpiada Internacional se tomaron 6 exámenes, donde el puntaje de cada examen era un número entero entre 0 y 21, inclusive. Para determinar el promedio final de cada alumno se eliminaron sus dos notas más bajas y se promediaron las cuatro notas restantes. Elizabeth dio los 6 exámenes y en los 5 primeros obtuvo 14, 14, 12, 17 y 15, respectivamente. Si el promedio final de Elizabeth fue de 16, ¿cuál fue su puntaje en el último examen?

### Segunda Fase - Nivel 3

3. Desde que vive en Arequipa, Martín va al hospital de 3 a 5 veces al año. Según él un año es bueno si va 3 veces, regular si va 4 veces y malo si va 5 veces. Han pasado  $n$  años desde que vive en Arequipa y desde entonces ha ido en total 32 veces al hospital. Determina el valor de  $n$  si Martín ha tenido al menos dos años buenos, al menos dos años regulares y al menos dos años malos.
4. Fabiola, Gerardo y Héctor tienen 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Las tarjetas son repartidas entre ellos de modo que cada uno recibe 3 tarjetas. Si la suma de los números de las tarjetas de Fabiola es el cuadrado de un número entero y la suma de los números de las tarjetas de Gerardo es el cubo de un número entero, calcule la suma de los números de las tarjetas de Héctor.
5. En la figura mostrada,  $ABCDE$  es un pentágono regular y  $P$  es un punto tal que  $AE = EP$  y  $\angle AEP = 48^\circ$ . Determine la medida del ángulo  $\angle PCB$ .



*Aclaración:* Un pentágono regular es aquel que tiene sus cinco lados iguales y sus cinco ángulos interiores iguales.

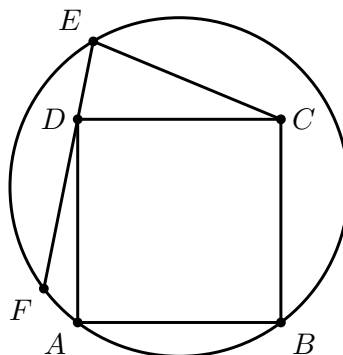
6. En un torneo de fútbol participaron 5 equipos. Cada equipo jugó contra cada uno de los otros equipos exactamente una vez. En cada partido se da 3 puntos al ganador, 0 al perdedor y 1 punto a cada equipo en caso de empate. Se sabe que el que quedó en primer lugar ganó tres partidos y empató uno; y el que quedó en último lugar ganó un partido y perdió tres. Si al final del torneo todos los equipos obtuvieron puntajes distintos, ¿cuál es la suma de los puntajes de los equipos que quedaron en segundo y cuarto lugar?

## Segunda Fase - Nivel 3

7. Determine el valor de  $x + y + z$ , sabiendo que  $x, y, z$  son enteros positivos que satisfacen la igualdad

$$2015 + x^2 = 3^y \cdot 4^z.$$

8. Sea  $AB$  una cuerda de una circunferencia  $\mathcal{S}$  sobre la cual se construye un cuadrado  $ABCD$  que está dentro de  $\mathcal{S}$ . Sea  $E$  un punto de  $\mathcal{S}$  tal que  $CE = CD$ . La prolongación del segmento  $ED$  corta a  $\mathcal{S}$  en el punto  $F$ . Se sabe que  $DE = 2$  y que la distancia de  $C$  a  $DE$  es 5. Si  $x$  es la longitud del segmento  $DF$ , calcule el valor de  $12x$ .



9. Hay 18 personas sentadas alrededor de una mesa circular. Cuatro personas se van a poner de pie de tal manera que entre cualquier persona puesta de pie y la siguiente puesta de pie (en sentido horario) no haya más de cinco personas sentadas. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?
10. Sean  $x, y, z$  ángulos agudos tales que

$$4[\sin(x + y) \sin(y + z) \sin(z + x) + 1] = (\sin(x + y) + 1)(\sin(y + z) + 1)(\sin(z + x) + 1).$$

Hallar el máximo valor que puede tomar la expresión:

$$100(\sin x + \sin y + \sin z)^2.$$

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Sociedad Matemática Peruana

## XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

### Tercera Fase - Nivel 3

15 de setiembre de 2015

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Walter compró entre 50 y 60 unidades de cierto producto y los vendió todos en una feria que duró exactamente una semana. Si se sabe que cada día, a partir del segundo día, vendió una unidad más que el día anterior, ¿cuántas unidades vendió el último día?
2. ¿Cuántos elementos, como máximo, se pueden eliminar del conjunto

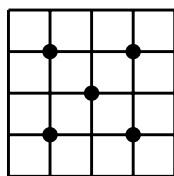
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

para que se cumpla que el producto de los elementos que queden sea múltiplo de cada uno de los números  $1, 2, 3, \dots, 14, 15$  ?

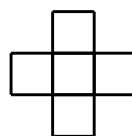


### Tercera Fase - Nivel 3

3. Cada casilla de un tablero de  $4 \times 4$  tiene escrito un número entero de tal modo que: cada cuadrado de  $2 \times 2$  de la esquina o el centro (es decir, cada cuadrado de  $2 \times 2$  cuyo centro es uno de los puntos marcados en la figura 1) tiene suma 9 y cada cruz formada por cinco casillas (como en la figura 2) tiene suma 10. Halle la suma de los números escritos en las cuatro esquinas del tablero.



(1)

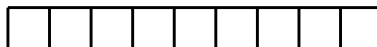


(2)

4. Halle la suma del mayor y el menor valor que puede tomar el entero positivo  $n$ , si el número  $2^{10} + 4^n + 1$  es un cuadrado perfecto.

*Aclaración:* Un cuadrado perfecto es un número de la forma  $k^2$ , donde  $k$  es un entero positivo.

5. Sea  $ABC$  un triángulo tal que  $\angle BAC = 45^\circ$ . En el segmento  $AC$  se ubica un punto  $D$  tal que  $\angle ABD + \angle ABC = 180^\circ$ . Si  $AD = 20\sqrt{2}$  y  $DC = 10\sqrt{2}$ , determine la longitud de  $AB$ .
6. Determine de cuántas formas se pueden ordenar los números del 1 al 9 en una fila de 9 casillas de tal forma que desde el inicio hasta el 9 los números estén ordenados de forma creciente y que desde el 9 hasta el final los números estén ordenados de forma decreciente. Tenga en cuenta que el 9 no puede ir al inicio o al final de la fila.

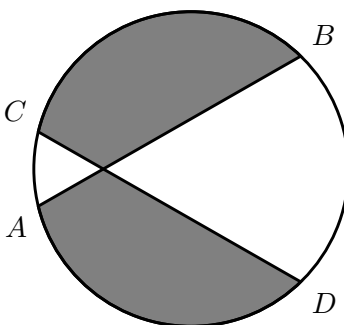


*Aclaración:* Una forma de ordenar los números es 239876541.

7. Sea  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  una progresión geométrica tal que  $a_1 = \sin \alpha$ ,  $a_2 = \tan \alpha$  y  $a_3 = \cos \alpha$ , donde  $\alpha$  es un ángulo agudo. Determine el valor de  $n$  para el cual se cumple que  $a_n = (\csc \alpha)^5$ .

### Tercera Fase - Nivel 3

8. Dos cuerdas  $AB$  y  $CD$  de una circunferencia, como se muestra en la figura, forman un ángulo de  $60^\circ$ , además, la distancia del centro de la circunferencia a cada una de dichas cuerdas es igual a  $\sqrt[4]{3}$ . Si el área de la superficie sombreada dentro de la circunferencia es 16, halla el área de la superficie no sombreada.



9. Sea  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ . ¿Cuántas funciones  $f : A \rightarrow A$  cumplen que  $f(xy) = f(x)f(y)$ , para todas las parejas  $(x, y)$  de elementos de  $A$  que cumplen la condición  $x \cdot y \leq 10$  ?
- Aclaración:* Algunas parejas  $(x, y)$  de elementos de  $A$  que cumplen la condición del enunciado son  $(1, 1)$  y  $(3, 2)$ .
10. Se tiene 10 monedas en una fila, donde cada una tiene cara y sello. Al inicio las 10 monedas muestran el sello. Una *operación* consiste en escoger dos monedas adyacentes que muestren lo mismo (ambas caras o ambas sellos) y voltearlas. Determine cuántas configuraciones diferentes se puede obtener, luego de algunas operaciones.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Sociedad Matemática Peruana

## XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

### Cuarta Fase - Nivel 3

18 de octubre de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

1. Sea  $\mathcal{C}$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano que tiene la siguiente propiedad: Para cada punto  $P$  de  $\mathcal{C}$ , existen cuatro puntos de  $\mathcal{C}$ , cada uno distinto de  $P$ , que son los vértices de un cuadrado. Halle el menor valor posible de  $n$ .
2. Sea  $ABCDEF$  un hexágono convexo. La diagonal  $AC$  es cortada por  $BF$  y  $BD$  en los puntos  $P$  y  $Q$ , respectivamente. La diagonal  $CE$  es cortada por  $DB$  y  $DF$  en los puntos  $R$  y  $S$ , respectivamente. La diagonal  $EA$  es cortada por  $FD$  y  $FB$  en los puntos  $T$  y  $U$ , respectivamente. Se sabe que cada uno de los siete triángulos  $APB$ ,  $PBQ$ ,  $QBC$ ,  $CRD$ ,  $DRS$ ,  $DSE$  y  $AUF$  tiene área 1. Halle el área del hexágono  $ABCDEF$ .
3. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  enteros positivos, con  $n \geq 2$ , tales que

$$\lfloor \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \rfloor = \lfloor \sqrt{a_1} \rfloor \cdot \lfloor \sqrt{a_2} \rfloor \cdots \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor.$$

Pruebe que al menos  $n - 1$  de dichos números son cuadrados perfectos.

*Aclaración:* Dado un número real  $x$ ,  $\lfloor x \rfloor$  denota al mayor número entero que es menor o igual que  $x$ . Por ejemplo,  $\lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2$  y  $\lfloor 3 \rfloor = 3$ .



Sociedad Matemática Peruana

### Cuarta Fase - Nivel 3

---

4. Sea  $b$  un entero positivo **impar**. Se define la sucesión  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  de la siguiente manera:  $a_1$  y  $a_2$  son enteros positivos y para todo  $k \geq 2$ ,

$$a_{k+1} = \begin{cases} \frac{a_k + a_{k-1}}{2} & \text{si } a_k + a_{k-1} \text{ es par,} \\ \frac{a_k + a_{k-1} + b}{2} & \text{si } a_k + a_{k-1} \text{ es impar.} \end{cases}$$

- a) Pruebe que si  $b = 1$ , entonces a partir de cierto término la sucesión se hará constante.
- b) Para cada  $b \geq 3$  (impar), pruebe que existen valores de  $a_1$  y  $a_2$  para los cuales la sucesión nunca se hará constante a partir de cierto término.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



Sociedad Matemática Peruana

## XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

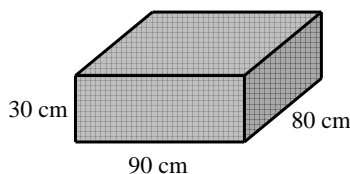
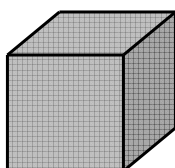
### Primera Fase - Nivel 3

14 de julio de 2016

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Importante: Se informa a todos los alumnos y personal encargado que está prohibido divulgar esta prueba, especialmente por internet, hasta el día 26 de julio.**

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Andrea rindió cuatro exámenes en el curso de matemática y obtuvo la misma nota en los tres primeros exámenes. Se sabe que la nota del cuarto examen fue 17 y el promedio de sus cuatro notas fue 14, ¿cuál fue la nota el segundo examen?  
A) 16                      B) 15                      C) 11                      D) 14                      E) 13
2. En una manifestación hay un grupo numeroso de personas que está ocupando una calle que tiene 200 metros de largo y 9 metros de ancho. Determine, aproximadamente, cuántas personas hay en la manifestación si se sabe que en un metro cuadrado hay 4 personas, en promedio.  
A) 36000                      B) 10800                      C) 7200                      D) 108000                      E) 72000
3. En la figura se muestran dos cajas que tienen igual volumen. La caja de la izquierda tiene forma de un cubo y la caja de la derecha tiene dimensiones 30 cm, 80 cm y 90 cm.

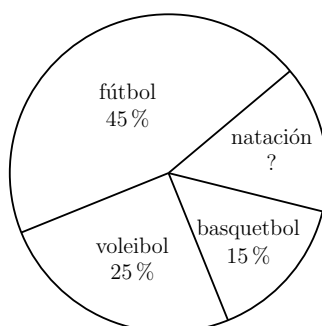


Determine el área de la base de la caja de la izquierda.

- A)  $3600 \text{ cm}^2$                       B)  $4000 \text{ cm}^2$                       C)  $4800 \text{ cm}^2$                       D)  $2400 \text{ cm}^2$                       E)  $4500 \text{ cm}^2$

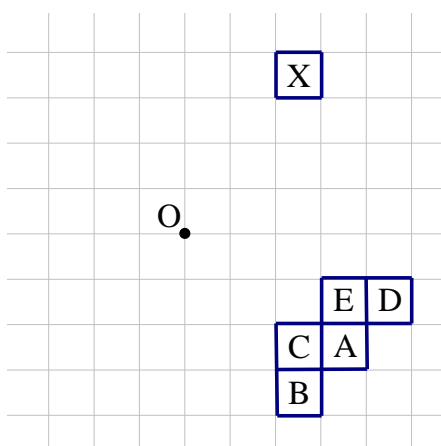
### Primera Fase - Nivel 3

4. A un grupo de personas se le preguntó por su deporte favorito, con los resultados se elaboró el siguiente gráfico circular:



Si 12 personas dijeron que su deporte favorito es natación, determine cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

- A) 12 personas dijeron que su deporte favorito es basquetbol.
  - B) Más de 30 personas dijeron que su deporte favorito es fútbol.
  - C) Más de 20 personas dijeron que su deporte favorito es voleibol.
  - D) Más de la mitad de las personas prefieren fútbol o voleibol.
  - E) Menos de la quinta parte del total dijo que su deporte favorito es natación.
5. ¿Qué cuadrado obtenemos al rotar el cuadrado X,  $90^\circ$  en sentido horario, con centro en el punto O?



- A) A
  - B) B
  - C) C
  - D) D
  - E) E
6. La suma de ocho números naturales consecutivos es 92. Sea  $P$  el producto de esos ocho números. ¿Cuál es el menor entero positivo que **no es divisor** de  $P$ ?
- A) 9
  - B) 13
  - C) 23
  - D) 17
  - E) 18



Sociedad Matemática Peruana

### Primera Fase - Nivel 3

7. Un estudio determinó que si la entrada del cine cuesta  $x$  soles, el número de asistentes será  $960 - 60x$ , donde  $x$  es un entero positivo entre 3 y 15, inclusive. ¿Para qué valor de  $x$  la cantidad de dinero que recaude el cine por la venta de las entradas será máxima?

A) 3                      B) 6                      C) 8                      D) 9                      E) 15

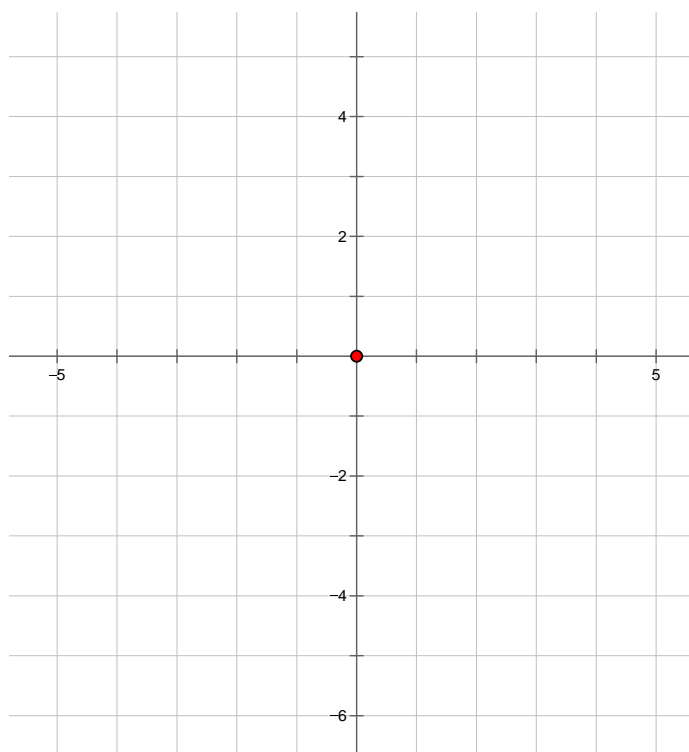
8. Sea  $M$  el punto medio del lado  $BC$  de un triángulo  $ABC$ , si se cumple que:

$$\angle BAM = 2\angle MAC = 2\angle MCA,$$

halla la medida del ángulo  $\angle ABC$ .

A)  $30^\circ$                       B)  $90^\circ$                       C)  $45^\circ$                       D)  $100^\circ$                       E)  $60^\circ$

9. Un alumno marcó en el plano cartesiano los siguientes tres puntos:  $(-3, 4)$ ,  $(4, -5)$  y  $(2, 5)$ . ¿Cuál es el cuarto punto que debe marcar el alumno para que los cuatro puntos sean los vértices de un rectángulo?



A)  $(-3, -4)$                       B)  $(0, -6)$                       C)  $(-2, -5)$                       D)  $(0, -5)$                       E)  $(-1, -6)$



### Primera Fase - Nivel 3

10. Se muestra la tabla de frecuencias de las notas obtenidas por los alumnos de un salón de clases

| Nota     | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|----------|---------------------|---------------------|
| [9, 11]  |                     | 10 %                |
| [12, 14] | 10                  |                     |
| [15, 17] |                     | 50 %                |
| [18, 20] | 6                   |                     |

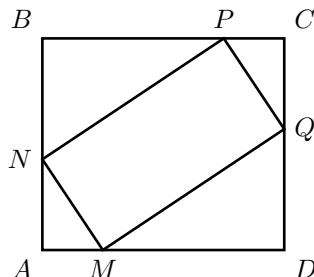
¿Cuántos alumnos hay en el salón de clases?

- A) 60                      B) 40                      C) 35                      D) 48                      E) 65
11. ¿Cuál de las siguientes funciones trigonométricas cumple que su máximo valor es igual al doble de su mínimo valor?
- A)  $r(x) = 2 \operatorname{sen} x$   
B)  $s(x) = 3 \cos x$   
C)  $t(x) = \operatorname{sen} x + 2$   
D)  $u(x) = 3 \operatorname{sen} x - 2$   
E)  $v(x) = \operatorname{sen} x + 3$
12. Un biólogo observó una muestra durante varios días, y observó que la cantidad de bacterias que hay en esa muestra, conforme pasan los días, crece según una progresión geométrica. El día 3 había  $3 \times 10^8$  bacterias y el día 5 había  $2,7 \times 10^{13}$  bacterias. ¿Cuántas bacterias había el día 4?
- A)  $2,85 \times 10^9$               B)  $9 \times 10^{10}$               C)  $9 \times 10^{11}$               D)  $6 \times 10^{11}$               E)  $2,8 \times 10^{11}$
13. Un litro de agua pesa 1 kilogramo y un litro de leche pesa 1,05 kilogramos. Se mezcló cierta cantidad de agua con cierta cantidad de leche y se obtuvo una mezcla de 20 litros que pesa  $n$  kilogramos. ¿Cuántos litros de agua hay en la mezcla?
- A)  $21(20 - n)$               B)  $20(20 - n)$               C)  $400 - n^2$               D)  $20(21 - n)$               E)  $21(19 - n)$
14. Roberto hace un viaje de ida y vuelta entre Lima y Huacho en su carro, que funciona con gas o gasolina. En la ida, usando solamente gas, el carro recorre 16 km por galón y en la vuelta, usando solamente gasolina, recorre 12 km por galón. En total, Roberto utilizó 21 galones de combustible en este viaje. ¿Cuál es la distancia, en km, entre Lima y Huacho?
- A) 120 km                      B) 144 km                      C) 192 km                      D) 132 km                      E) 108 km



### Primera Fase - Nivel 3

15. El rectángulo  $MNPQ$  está inscrito en el rectángulo  $ABCD$ , como se muestra en la figura. Si  $AB = 7$ ,  $BC = 8$  y  $NP = 2MN$ , halle el área del rectángulo  $MNPQ$ .



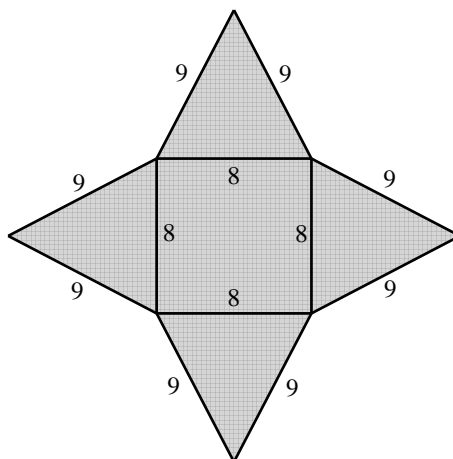
- A) 26                      B) 36                      C) 28                      D) 32                      E) 24

16. Sean  $x, y, z$  números reales tales que

$$\begin{aligned}x + y &= z^2 - 3, \\y + z &= x^2 - 3, \\z + x &= y^2 - 3.\end{aligned}$$

Si  $x \neq y$  y además,  $x \neq z$ , calcule el valor de  $yz$ .

- A)  $-2$                       B)  $\sqrt{2}$                       C)  $2$                       D)  $1$                       E)  $9$
17. En la figura se muestra el desarrollo de una pirámide de base cuadrada, donde las longitudes mostradas están expresadas en cm. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?



- A)  $\frac{448}{3} \text{ cm}^3$                       B)  $128 \text{ cm}^3$                       C)  $\frac{64\sqrt{13}}{3} \text{ cm}^3$                       D)  $\frac{64\sqrt{51}}{3} \text{ cm}^3$                       E)  $132 \text{ cm}^3$

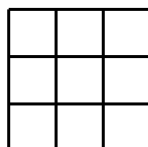


Sociedad Matemática Peruana

### Primera Fase - Nivel 3

---

18. En cada casilla del siguiente tablero de  $3 \times 3$  debe estar escrito un entero positivo, de tal modo que el producto de los números de cualquier fila y el producto de los números de cualquier columna es múltiplo de 30. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de todos los números escritos en el tablero?



- A) 35                      B) 43                      C) 36                      D) 33                      E) 30
19. Sara observa la cruz ubicada en lo alto de una montaña con un ángulo de elevación de  $\alpha^\circ$ . Luego de avanzar 50 metros en dirección a la montaña, ella observa la misma cruz con un ángulo de elevación de  $90^\circ - \alpha^\circ$ . Luego de avanzar 15 metros más, ella observa la cruz con un ángulo de elevación de  $2\alpha^\circ$ . ¿A qué altura (en metros) está la cruz?
- A) 65                      B) 60                      C) 72                      D) 50                      E) 55
20. Una calculadora extraña tiene inicialmente el número 1 en su pantalla y solo tiene 2 botones. Con uno de los botones se le suma 5 al número de la pantalla y con el otro botón se le suma 9. Algunos números se pueden obtener en la pantalla (como 10 y 11), pero hay otros que no se pueden obtener (como 2 y 8). Encuentre el mayor número que no se puede obtener en la pantalla y dé como respuesta la suma de los dígitos de dicho número.
- A) 5                      B) 6                      C) 7                      D) 8                      E) 9

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

### Segunda Fase - Nivel 3

16 de agosto de 2016

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **No puedes llevar estas hojas que contienen los enunciados, ni tampoco publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible. Las pruebas se publicarán en la página web del Ministerio de Educación, Concursos Educativos - ONEM, a partir del 19 de agosto.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Alejandra, Ruth y Edwin fueron al mercado para abastecer sus juguerías. Alejandra compró 2 piñas y 3 papayas. Ruth compró 5 piñas y 1 papaya. Edwin compró 4 piñas y 2 papayas. Si Alejandra gastó 42 soles y Ruth gastó 40 soles, ¿cuántos soles gastó Edwin?

*Aclaración:* Considere que todas las piñas cuestan lo mismo y que todas las papayas cuestan lo mismo.

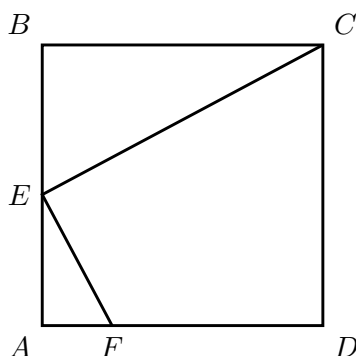
2. Gregorio tiene dos dados, uno rojo y otro azul. ¿Cuántas posibilidades existen, de que al lanzar Gregorio sus dos dados, obtenga dos números cuyo producto sea par?



### Segunda Fase - Nivel 3

---

3. Sea  $ABCD$  un cuadrado de lado 12. Sean  $E$  y  $F$  puntos de los lados  $AB$  y  $AD$ , respectivamente, tales que  $\angle CEF = 90^\circ$ . Si el área del triángulo  $CBE$  es igual a 4 veces el área del triángulo  $EAF$ , halla la longitud del segmento  $CF$ .



4. ¿Cuál es el menor número entero positivo, múltiplo de 4, tal que el producto de sus dígitos es 2016 ?
5. Un conjunto  $A$  está formado por 10 números reales (distintos), de tal modo que la suma de cualesquiera seis de ellos es mayor que la suma de los otros cuatro elementos. ¿Cuál es la menor cantidad de elementos positivos que puede tener el conjunto  $A$ ?
6. Determina el menor número entero  $n$ , con  $n > 1$ , tal que los dos números  $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$  y  $\sqrt{\frac{n+2}{3}}$  son racionales.
7. ¿Cuántos números enteros positivos menores que  $2^{16} + 2^{15}$  se pueden expresar como la suma de cinco potencias de 2, todas diferentes entre sí?

*Aclaración:* Considere que las potencias de 2 son  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$



### Segunda Fase - Nivel 3

---

8. Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo tal que  $\angle BAC = 2\angle BCA$ . Sea  $D$  un punto interior tal que  $\angle DAC = 2\angle DCA$ . Sean  $E$  y  $F$  los pies de las alturas trazadas desde  $B$  y  $D$  hacia el lado  $AC$ , respectivamente. Si  $AD = 12$  y  $EF = 4$ , halla la longitud del lado  $AB$ .
9. Sean  $x, y$  números reales positivos tales que  $x^3 + y^3 = 3xy$ . Sea  $M$  el mayor valor que puede tomar  $x$ . Determina el valor de  $12 \cdot M^{12}$ .
10. En la pizarra están escritos los números 1 y 2. En cada *paso*, si en la pizarra están escritos los números  $m$  y  $n$ , Julián escribe el número  $mn + m + n$  en la pizarra y luego borra uno de los dos números anteriores (es decir, borra  $m$  o borra  $n$ ). ¿Cuál es el menor número, mayor que 1000, que puede obtener Julián después de realizar algunos pasos?

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

### Tercera Fase - Nivel 3

22 de setiembre de 2016

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. El producto de tres números enteros positivos distintos es 2000 y ninguno de ellos es múltiplo de 25. Calcule la suma de esos tres números.
2. Determine el **mayor** valor entero que puede tomar la siguiente expresión:

$$\frac{\square + \square + \square + \square}{\square + \square - \square}$$

si en los cuadrados deben estar escritos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 en algún orden (sin que se repitan).



### Tercera Fase - Nivel 3

---

3. En una mesa hay nueve tarjetas enumeradas del 1 al 9. Ana toma tres tarjetas, Beatriz toma otras tres tarjetas y Carla se queda con las tres tarjetas sobrantes. Resulta que ninguna de ellas tiene dos tarjetas con números consecutivos, además, la suma de los números de las tarjetas de Beatriz es el doble de la suma de los números de las tarjetas de Ana. Si una de las tarjetas de Carla tiene el número 5, determine la suma de los números de las otras dos tarjetas de Carla.
4. Jesús y Samael trabajarán en el directorio de una empresa junto con otras cuatro personas. El primer día de trabajo se formarán dos equipos de tres personas, por medio de un sorteo. Si la probabilidad de que Jesús y Samael estén en el mismo grupo es del  $n\%$ , determine el valor de  $n$ .
5. Halle el área del triángulo cuyos vértices en el plano cartesiano son los puntos  $(3, 2)$ ,  $(1, -2)$  y  $(2^{20}, 2^{21})$ .
6. ¿Para cuántos números primos  $p$  existe un número primo  $q$  tal que  $p^2 + 11pq + 25q^2$  es un cuadrado perfecto?
7. Sea  $ABC$  un triángulo tal que  $\angle BAC = 80^\circ$  y  $\angle ABC = 40^\circ$ . Sean  $D$  y  $E$  puntos sobre los lados  $AB$  y  $BC$ , respectivamente, tales que  $DE$  es perpendicular a  $AB$  y  $AD = CE$ . Si  $\angle DCE = \alpha^\circ$ , determine el valor de  $2\alpha$ .



### Tercera Fase - Nivel 3

---

8. Sean  $a, b, c$  y  $d$  números enteros positivos tales que  $\frac{a}{480}$ ,  $\frac{b}{630}$  y  $\frac{c}{d}$  son fracciones irreducibles y además:

$$\frac{a}{480} + \frac{b}{630} = \frac{c}{d}.$$

Determine el menor valor posible de  $d$ .

*Aclaración:* Una fracción  $\frac{m}{n}$  es *irreducible* si el máximo común divisor de  $m$  y  $n$  es 1.

9. Sean  $x, y, z$  reales positivos tales que

$$x^2 + xy + y^2 = 5,$$

$$y^2 + yz + z^2 = 6,$$

$$z^2 + zx + x^2 = 8.$$

Calcule el valor de  $(xy + yz + zx)^2$ .

10. Para cada conjunto no vacío  $S$  de números enteros positivos, sea  $S^*$  el conjunto que se obtiene al sumar 2 a cada elemento de  $S$ . Por ejemplo, si  $A = \{2, 4, 5\}$  entonces  $A^* = \{4, 6, 7\}$ . ¿Para cuántos conjuntos  $S$  se cumple que la unión de  $S$  con  $S^*$  es el conjunto de todos los enteros positivos del 1 al 19, es decir,  $S \cup S^* = \{1, 2, 3, \dots, 18, 19\}$  ?

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**





PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

### Cuarta Fase - Nivel 3

23 de octubre de 2016

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
  - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
  - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
- 

1. Sea  $ABCD$  un trapecio de bases paralelas  $BC$  y  $AD$ . Si  $\angle CAD = 2\angle CAB$ ,  $BC = CD$  y  $AC = AD$ , determine todos los posibles valores de la medida del ángulo  $\angle CAB$ .

2. ¿Cuántas fichas de dominó se puede colocar como mínimo en un tablero de  $3 \times 12$ , de tal modo que sea imposible colocar una ficha de  $1 \times 3$ ,  $3 \times 1$  ó  $2 \times 2$  en lo que queda del tablero?

*Aclaración:* Cada dominó cubre exactamente dos cuadraditos del tablero. Las fichas no se pueden superponer.

3. Sea  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales. Encuentre todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$f(x+y) + f(x+z) - f(x)f(y+z) \geq 1,$$

para todos los números reales  $x, y, z$ .



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

### Cuarta Fase - Nivel 3

---

4. Sean  $a$  y  $n$  números enteros, con  $a > 2$  y  $n > 1$ . Si  $a^n - 2^n$  es un cuadrado perfecto, pruebe que  $a$  es par en los siguientes casos:

- a)  $n$  es par.
- b)  $n$  es impar.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XIV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2017)

### Primera Fase - Nivel 3

12 de julio de 2017

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - Entrega tu hoja de respuestas y el cuadernillo de preguntas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - **Importante: Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de esta prueba por ningún medio. La pruebas serán colgadas en la web de la ONEM.**
- 

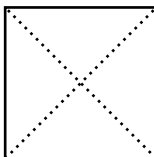
### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Karen y Lucía fueron a comprar útiles escolares para sus hijos. Karen compró 2 lapiceros y 4 cuadernos, mientras que Lucía compró 6 lapiceros y 12 cuadernos. Si Karen pagó 19 soles, ¿cuánto pagó Lucía?  
A) 37 soles                      B) 48 soles                      C) 57 soles                      D) 38 soles                      E) 76 soles
2. Uno de los salones de la I. E. San Carlos de Puno tiene sus carpetas ordenadas en 4 columnas, donde cada columna tiene  $n$  carpetas. Luego de retirar una carpeta, las que quedan se pueden ordenar en 5 columnas, donde cada columna tiene  $n - 2$  carpetas. ¿Cuántas carpetas había al inicio?  
A) 35                              B) 42                              C) 40                              D) 44                              E) 36
3. Una vela de 24 cm se consume 6 cm por hora, a rapidez constante. ¿En cuánto tiempo se consume la tercera parte de la vela?  
A) 1 hora                              B) 1 hora y 20 minutos                              C) 1 hora y 30 minutos  
D) 1 hora y 40 minutos                              E) 1 hora y 45 minutos
4. En una granja hay vacas, cerdos y pollos. El número de vacas es al número de cerdos como 2 es a 3 y el número de cerdos es al número de pollos como 4 es a 15. Luego, podemos asegurar que el número total de animales de la granja es:  
A) múltiplo de 4                              B) múltiplo de 13                              C) múltiplo de 20  
D) múltiplo de 7                              E) múltiplo de 2



### Primera Fase - Nivel 3

5. A las 6:00 am el depósito de agua de una familia estaba lleno. A las 2:00 pm la familia ya había usado el 40 % del contenido del depósito, luego, entre las 2:00 pm y 11:00 pm usaron  $\frac{2}{3}$  de lo que quedaba a las 2:00 pm. Si a las 11:00 pm aún quedaban 96 litros en el depósito, ¿cuántos litros había a las 6:00 am?
- A) 480                      B) 280                      C) 960                      D) 576                      E) 450
6. Hilda observó un cóndor en el Cañón del Colca, el cual estaba volando en línea recta. Al inicio Hilda observó que el cóndor estaba a 500 metros de altura y después de 10 segundos estaba a 480 metros de altura. ¿Después de cuántos segundos, desde que Hilda empezó a observar al cóndor, éste estaba a 420 metros de altura?
- A) 45                      B) 30                      C) 60                      D) 40                      E) 35
7. Se tiene un cuadrado de papel  $16 \text{ cm}^2$  de área. Al trazar las dos diagonales del cuadrado se obtiene cuatro triángulos:



Si el perímetro de cada triángulo es  $p$  cm, determine en qué intervalo se encuentra  $p$ :

- A)  $6 < p < 7$               B)  $7 < p < 8$               C)  $8 < p < 9$               D)  $9 < p < 10$               E)  $10 < p < 11$
8. Andrea va a viajar a Ecuador para lo cual necesita cambiar algunos soles por dólares. En el Banco Independencia 1 dólar cuesta 3,26 soles y en el Banco Confianza 1 dólar cuesta 3,28 soles. En el Banco Independencia te cobran 15 soles de comisión por cualquier cambio de moneda, y en el Banco Confianza no cobran comisión. Andrea fue el día lunes al Banco Independencia y regresó con 100 dólares; el día martes fue al Banco Confianza y también regresó con 100 dólares. ¿Cuántos soles en total gastó Andrea para obtener los 200 dólares?
- A) 669                      B) 654                      C) 677                      D) 684                      E) 665
9. En una fábrica de panetones, 5 máquinas envasan 7200 cajas en 6 horas. ¿Cuántas máquinas más se debe comprar para que, junto a las anteriores, puedan envasar 15360 cajas en 8 horas?
- Nota:* Considere que todas las máquinas trabajan a la misma rapidez.
- A) 6                      B) 5                      C) 4                      D) 3                      E) 2



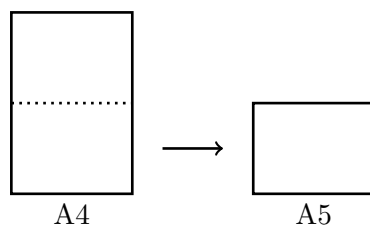
### Primera Fase - Nivel 3

10. En la I. E. Illathupa de Huánuco solo se atiende a estudiantes del nivel secundario y las cantidades por grado se muestran en la siguiente tabla:

| Grado   | Nº estudiantes |
|---------|----------------|
| Primero | 347            |
| Segundo | 268            |
| Tercero | 230            |
| Cuarto  | 251            |
| Quinto  | 244            |

Un grupo de estudiantes quiere hacer una encuesta a todos los estudiantes de la I. E., pero al ver que son muchos, decidieron escoger una muestra representativa de 210 estudiantes y hacer la encuesta solo con ellos. En dicha muestra las cantidades de estudiantes por grados deben ser proporcionales a las cantidades que hay por grado en toda la I. E. ¿Cuántos estudiantes de segundo grado debe haber en dicha muestra?

- A) 21                      B) 42                      C) 54                      D) 66                      E) 78
11. El *índice* de un rectángulo se define como el cociente de su lado mayor entre su lado menor. Así, por ejemplo, si un rectángulo tiene 3 cm de largo y 2 cm de ancho, su índice es  $3 \div 2 = 1,5$ . En las imprentas trabajan con varios tamaños de papeles, uno de los más usados es el tamaño A4. Si a una hoja tamaño A4 se le hace un corte a la mitad (uniendo los puntos medios de sus lados mayores) se obtiene dos hojas de tamaño A5.



Una propiedad interesante es que una hoja de tamaño A4 tiene el mismo índice que una hoja tamaño A5. Calcule, aproximadamente, dicho índice.

- A) 2                      B) 1,41                      C) 1,5                      D) 1,35                      E) 1,63
12. En una obra teatral, realizada en el Teatro Municipal de Arequipa, los niños pagan S/ 8 y los adultos S/ 25. Si en total se recaudó S/ 942 y se vendieron más boletos de adultos que de niños, ¿cuántos boletos se vendieron en total?
- A) 71                      B) 37                      C) 54                      D) 58                      E) 61



## Primera Fase - Nivel 3

13. Sean  $m$  y  $n$  números enteros. ¿En cuál o cuáles de los siguientes casos se puede asegurar que  $|m| + n = |m + n|$ ?

- I. Cuando  $m > 0$ .  
 II. Cuando  $n > 0$ .  
 III. Cuando  $m + n > 0$ .
- A) solo I                  B) solo II                  C) I y II                  D) I y III                  E) en ningún caso

14. Calcule la probabilidad de que al lanzar tres dados se obtenga tres números distintos.

*Nota:* Considere que cada dado tiene en sus caras los números del 1 al 6.

- A)  $\frac{5}{9}$                   B)  $\frac{2}{3}$                   C)  $\frac{1}{2}$                   D)  $\frac{4}{9}$                   E)  $\frac{3}{4}$

15. El *sistema de puntuación Elo* es un método matemático para calcular la habilidad relativa de los jugadores de ajedrez. De esta forma cada ajedrecista tiene una puntuación Elo que va cambiando en el tiempo, según los resultados que obtiene al enfrentarse a otros jugadores. La diferencia de la puntuación Elo entre dos jugadores determina una probabilidad estimada de puntuación entre ellos, llamada *puntuación esperada*. Si el jugador  $A$  tiene una puntuación Elo  $R_A$  y el jugador  $B$  tiene una puntuación Elo  $R_B$ , la fórmula exacta de la puntuación esperada del jugador  $A$  al enfrentarse a  $B$  es:

$$\frac{1}{1 + 10^{(R_B - R_A)/400}}.$$

Actualmente, los tres ajedrecistas peruanos con mayor puntuación Elo son los siguientes:

| Ajedrecista    | Puntuación Elo |
|----------------|----------------|
| Julio Granda   | 2656           |
| Emilio Córdova | 2643           |
| Jorge Cori     | 2630           |

Usando la fórmula anterior, podemos determinar que la puntuación esperada de Julio Granda al enfrentarse a Emilio Cordova es

$$\frac{1}{1 + 10^{(2643 - 2656)/400}},$$

que es aproximadamente igual a 0,519. Calcule, aproximadamente, la puntuación esperada de Jorge Cori al enfrentarse a Emilio Córdova.

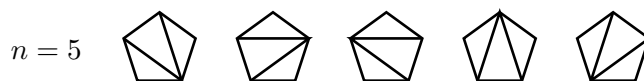
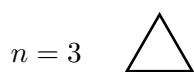
- A) 0,519                  B) 0,423                  C) 0,481                  D) 0,416                  E) 0,459



### Primera Fase - Nivel 3

16. *Triangular* un polígono convexo de  $n$  lados consiste en trazar algunas diagonales que no se cortan dentro del polígono, de tal forma que el polígono quede dividido en triángulos. Además, sea  $T_n$  el número de formas en que se puede triangular un polígono regular de  $n$  lados.

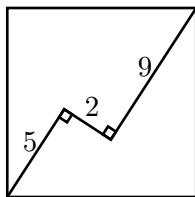
Para  $n = 3$ , el polígono es un triángulo y no es necesario trazar diagonales para triangularlo, o sea tenemos que  $T_3 = 1$ . Para  $n = 4$ , el polígono es un cuadrado y tenemos que  $T_4 = 2$ . Para  $n = 5$ , el polígono es un pentágono y tenemos que  $T_5 = 5$ .



Determine el valor de  $T_6$ .

- A) 18                      B) 9                      C) 8                      D) 14                      E) 7

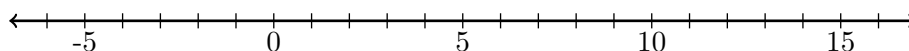
17. En la figura se muestra tres segmentos dentro de un cuadrado. El segundo segmento tiene longitud 2 cm y es perpendicular a los otros dos segmentos de longitudes 5 cm y 9 cm.



¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?

- A) 11 cm                      B) 10 cm                      C) 14 cm                      D)  $7\sqrt{2}$  cm                      E)  $6\sqrt{2}$  cm

18. Una rana se encuentra en el punto 0 de la recta numérica, y planea dar saltos de la siguiente manera: en su primer salto, quiere saltar una unidad en cualquier dirección (izquierda o derecha), en su segundo salto quiere saltar dos unidades en cualquier dirección, en su tercer salto quiere saltar tres unidades en cualquier dirección, y así sucesivamente. ¿Cuántos saltos, como mínimo, debe realizar la rana para llegar al punto 12?

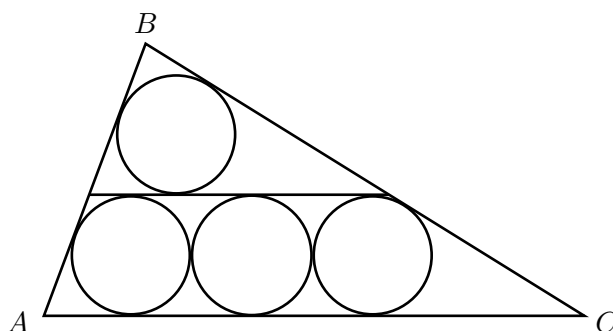


- A) 8                      B) 9                      C) 5                      D) 6                      E) 7



### Primera Fase - Nivel 3

19. Las cuatro circunferencias mostradas tienen igual radio y cada una es tangente a uno o dos lados del triángulo; cada circunferencia es tangente al segmento que está dentro del triángulo  $ABC$  y además, la circunferencia central inferior es tangente a las circunferencias vecinas. Si  $AC = 12$  cm, calcule el área del triángulo  $ABC$ .



- A)  $24\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>      B)  $18\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>      C) 30 cm<sup>2</sup>      D)  $7\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>      E) 36 cm<sup>2</sup>
20. Determine cuántos números de 6 dígitos cumplen que cada dígito pertenece al conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (está permitido repetir dígitos) y además la suma de cualesquiera dos dígitos adyacentes es múltiplo de 2 o de 3.
- Nota:* Algunos números de 6 dígitos que cumplen las condiciones requeridas son 111112, 153154 y 666666.
- A)  $3^6 \times 2^4$       B)  $3^4 \times 2^5$       C)  $2^{12}$       D)  $3^6 \times 2^3$       E)  $3 \times 2^{11}$

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**





PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XIV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2017)

### Segunda Fase - Nivel 3

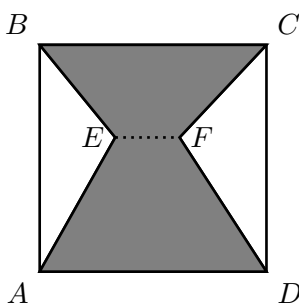
29 de agosto de 2017

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas y verifica que se ponga la hora en la que estás entregando. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- **No puedes llevar estas hojas que contienen los enunciados.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En el interior de un cuadrado  $ABCD$  de lado 15 hay dos puntos  $E$  y  $F$  tales que  $BC$ ,  $AD$  y  $EF$  son paralelos. Si el área del hexágono  $AEBCFD$  representa el 60 % del área del cuadrado, calcule la longitud del segmento  $EF$ .



2. Considere el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Sea  $B$  un subconjunto de  $A$  tal que la suma de sus elementos es 25. ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puede tener  $B$ ?



### Segunda Fase - Nivel 3

---

3. Un niño escribió en su cuaderno todos los números naturales desde el 1 al 180, de la siguiente forma:

$$1, 2, 3, 4, \dots, 180.$$

Luego, borró cada número múltiplo de 3 y en su lugar escribió la tercera de dicho número. Al final de este proceso, en el cuaderno del niño hay 180 números, pero algunos están repetidos. ¿Cuántos números diferentes hay en el cuaderno del niño?

4. Las edades de tres hermanos y su padre forman una progresión geométrica. Si la suma de las edades del hermano menor y el padre es 70, halle la edad del hermano mayor.

*Aclaración:* En una progresión geométrica, la razón no necesariamente es un número entero. Por ejemplo, los números 9, 12 y 16 forman una progresión geométrica de razón  $\frac{4}{3}$ .

5. Sea  $\alpha$  un ángulo agudo tal que  $\cos^4 \alpha + 2 \tan^2 \alpha = 3$ , calcule el valor de  $6(\sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha)$ .

6. Se tiene un polígono regular de 10 lados, donde cada uno tiene longitud 1. Se quiere pintar tres de sus vértices: uno de rojo, uno de azul y uno verde, de tal modo que la distancia entre el vértice rojo y el vértice azul sea mayor que 1, y la distancia entre el vértice azul y el vértice verde sea mayor que 1. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

7. Suponga que  $k$  es un número real para el cual la gráfica de la función  $f(x) = x^4 + x^3 - kx$  tiene un *eje de simetría vertical*. Se sabe que  $k$  se puede expresar como  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos coprimos. Determine el valor de  $a + b$ .

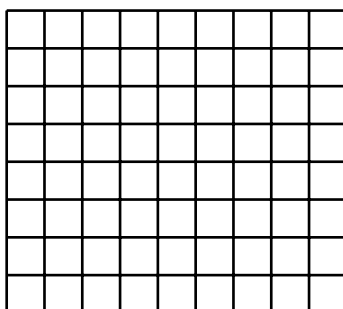
*Aclaración:* Decimos que cierta gráfica tiene un eje de simetría vertical si existe una recta vertical (es decir, paralela al eje  $y$ ) tal que la gráfica es simétrica con respecto a esa recta.



### Segunda Fase - Nivel 3

---

8. Mario va a escoger algunas casillas de un tablero de  $8 \times 9$  y en cada casilla escogida él va a trazar una o dos diagonales, de tal forma que en todo el tablero no haya dos diagonales que compartan un extremo (tenga en cuenta que cada diagonal trazada tiene dos extremos). Determine cuántas diagonales, como máximo, puede trazar Mario en todo el tablero.



9. Un entero positivo  $N$  tiene exactamente 80 divisores positivos, que ordenados de menor a mayor son:

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_{79} < d_{80} = N.$$

Determine cuántos divisores positivos, como mínimo, puede tener el número  $d_{73}$ .

10. Sea  $D$  un punto del lado  $AB$  de un triángulo  $ABC$  tal que  $AD = 3DB$  y  $AC = BC + 2BD$ . Si  $\angle BAC = 40^\circ$ , determine la medida del ángulo  $\angle ADC$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

**PERÚ**Ministerio  
de Educación

Sociedad Matemática Peruana

## XIV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2017)

### Tercera Fase - Nivel 3

29 de setiembre de 2017

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas (120 minutos) para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas y asegúrate de que hayas guardado tus respuestas en el sistema. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega, registrada en el sistema.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Hay una enfermedad que está atacando a los habitantes de un pueblo. Hace un mes, el 20 % de los habitantes tenía la enfermedad y el 80 % restante gozaba de buena salud. En el transcurso de este último mes, el 20 % de los habitantes que estaban enfermos se curaron y el 20 % de los habitantes que gozaban de buena salud se enfermaron. Si actualmente, el  $n$  % de los habitantes goza de buena salud, determine el valor de  $n$ .
2. Los cuatro equipos de fútbol del Torneo Descentralizado Peruano: Ayacucho FC, FBC Melgar, Cantolao y UTC participaron de un cuadrangular, es decir, cualesquiera dos equipos se enfrentaron exactamente una vez. Ayacucho FC y FBC Melgar terminaron el cuadrangular con 4 puntos cada uno, Cantolao terminó con 7 puntos y UTC terminó con  $x$  puntos. ¿Cuántos valores puede tomar  $x$ ?

*Aclaración:* Tenga en cuenta que en el fútbol se otorga 3 puntos al ganador de un partido, 0 puntos al perdedor; y 1 punto a cada equipo en caso de empate.



PERÚ

Ministerio  
de Educación

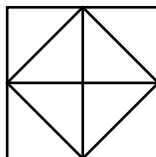


Sociedad Matemática Peruana

### Tercera Fase - Nivel 3

---

3. La siguiente figura está formada por 8 triángulos iguales. Cada triángulo se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cualesquiera dos triángulos que tienen un lado en común deben ser pintados de colores diferentes. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?



4. Un tetraedro  $ABCD$  tiene seis aristas cuyas longitudes, en algún orden, son 4, 6, 9, 13, 18 y 21. Si la arista  $AB$  mide 21, ¿cuánto mide la arista  $CD$ ?
5. Para cada entero positivo  $n$ , sea  $a_n$  el menor entero positivo tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es  $n$ . Por ejemplo,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 11$ ,  $a_3 = 111$ ,  $a_4 = 2$  y  $a_5 = 12$ . Sea  $k$  un entero positivo y  $d$  un dígito tal que  $a_k = \overline{13d6}$ , determine el valor de  $k$ .
6. En un triángulo acutángulo  $ABC$  se traza la altura  $BD$ . Sea  $H$  el ortocentro del triángulo  $ABC$  (punto de intersección de las alturas). Si  $AD = 9$ ,  $DC = 50$  y  $\angle DHC = 2\angle DHA$ , calcule el área del triángulo  $ABC$ .
7. Halle el menor valor posible de la expresión

$$\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) \cdot \left(x + \frac{81}{x} + 9\right),$$

donde  $x$  es un número real positivo.

8. Halle el menor entero positivo  $N$  para el cual existen al menos dos ternas ordenadas  $(x, y, z)$  de números enteros que satisfacen la condición  $1 < x \leq y \leq z$ , y además

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) = N.$$



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

### Tercera Fase - Nivel 3

---

9. Lanzamos un dado varias veces y sumamos los resultados. Nos detenemos justo después de obtener un número mayor que 2017. Los posibles números en los que nos podemos detener son 2018, 2019, 2020, 2021, 2022 o 2023. ¿Cuál de esos seis números tiene mayor probabilidad de ser el número en el que nos detenemos?

*Aclaración:* Un dado tiene en sus caras los números del 1 al 6, y al lanzarlo cada número tiene igual probabilidad de salir.

10. Encuentre el número entero  $m$  para el cual se cumple lo siguiente:

$$m \leq \frac{33}{29} \times \frac{41}{37} \times \frac{49}{45} \times \cdots \times \frac{2009}{2005} \times \frac{2017}{2013} < m + 1.$$

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XIV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2017)

### Cuarta Fase - Nivel 3

12 de noviembre de 2017

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

1. Una sucesión infinita  $a_1, a_2, a_3, \dots$  es llamada *generadora* si:  $a_1$  es 1 o 2, y para todo  $n \geq 1$ ,  $a_{n+1}$  se obtiene a partir de  $a_n$  colocando un dígito 1 a la izquierda o un dígito 2 a la derecha. Pruebe que existe una sucesión infinita generadora tal que ninguno de sus términos es múltiplo de 7.

2. Cada casilla de un tablero de  $7 \times 8$  es pintada de blanco o negro, de tal modo que cada subtablero de  $3 \times 3$  tenga al menos dos casillas negras que son vecinas. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas negras que puede haber en todo el tablero?

*Aclaración:* Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

3. La sucesión infinita  $r_1, r_2, r_3, \dots$  de números racionales positivos cumple que

$$r_1 \cdot r_2 \cdots r_k = r_1 + r_2 + \cdots + r_k,$$

para todo entero positivo  $k$ . Pruebe que  $\frac{1}{r_n} - \frac{3}{4}$  es el cuadrado de un número racional, para todo entero  $n \geq 3$ .



Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

### Cuarta Fase - Nivel 3

---

4. Sean  $A, B, C$  y  $D$  puntos en una recta  $\ell$  en ese orden, tales que  $AB = BC$  y  $AC = CD$ . Sea  $\omega$  una circunferencia que pasa por  $B$  y  $D$ . Una recta que pasa por  $A$  corta a  $\omega$  en los puntos  $P$  y  $Q$ , con  $Q$  entre  $A$  y  $P$ . Sea  $M$  el punto medio de  $PD$  y sea  $R$  el simétrico de  $Q$  con respecto a la recta  $\ell$ . Suponga que los segmentos  $PR$  y  $MB$  se intersectan en el punto  $N$ , pruebe que los puntos  $P, M, C$  y  $N$  pertenecen a una misma circunferencia.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN





PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

### Primera Fase - Nivel 3

11 de julio de 2018

- 
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
  - **Entrega tu hoja de respuestas y el cuadernillo de preguntas** tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
  - Escribe tus datos (nombre, grado, etc) y la hora de entrega con lapicero. Te recomendamos que marques tus respuestas con lápiz.
  - **Importante: Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de esta prueba por ningún medio.**
- 

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Un cocinero compró el día de ayer 12 kg de limón y pagó S/48. ¿Cuánto pagará hoy si quiere comprar 20 kg y el costo del limón se incrementó en 10 %?  
A) S/88                      B) S/110                      C) S/90                      D) S/77                      E) S/80
2. Carlos tiene cuatro tarjetas (llamadas  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$ ) y cada una contiene un número de dos dígitos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $S$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 23  | 55  | 36  | 96  |

Carlos quiere obtener un número **par** de 8 dígitos y que sea lo mayor posible, ¿en qué orden debe ubicar las tarjetas?

- A)  $SQRP$                       B)  $SQPR$                       C)  $PQRS$                       D)  $QSPR$                       E)  $SPQR$
3. Alex tiene  $2k$  palitos idénticos. Con  $k$  palitos puede formar el borde de un cuadrado y con los otros  $k$  palitos puede formar el borde de un hexágono regular. Si en ningún caso fue necesario que Alex rompa algún palito, entonces podemos asegurar que  $k$  es múltiplo de ...  
A) 24                      B) 9                      C) 8                      D) 16                      E) 12



### Primera Fase - Nivel 3

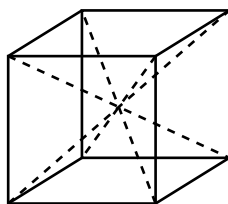
---

4. Dos ángulos interiores de un trapezio miden  $70^\circ$  y  $120^\circ$ . Calcule la diferencia de las medidas de los otros dos ángulos interiores.
- A)  $90^\circ$                       B)  $70^\circ$                       C)  $50^\circ$                       D)  $80^\circ$                       E)  $10^\circ$
5. El *Curiosity* es un vehículo explorador que se encuentra actualmente en Marte. Cuando este vehículo se encontraba a 216 millones de kilómetros de la Tierra, emitió una señal. ¿Cuántos minutos se demora en llegar la señal al Centro de datos de la NASA en la Tierra, si ésta viaja a una velocidad de 300 000 kilómetros por segundo?
- A) 12                              B) 9                              C) 7,2                              D) 8                              E) 15
6. En una bodega hay tres cajas cuyos contenidos son los siguientes:
- Primera caja: 20 latas de leche y 30 latas de atún.
  - Segunda caja: 18 latas de leche y 33 latas de atún.
  - Tercera caja:  $n$  latas de leche.
- Si se sabe que las tres cajas pesan lo mismo, determine el valor de  $n$ .
- A) 42                              B) 30                              C) 45                              D) 40                              E) 43
7. Un juego es llamado *justo* si la probabilidad de ganar es igual a la probabilidad de perder. ¿Cuántos de los siguientes juegos (que involucran todos lanzar un dado usual de 6 caras) son justos?
- Juego 1: “Ganas si obtienes el número 4”
  - Juego 2: “Ganas si obtienes un número par”
  - Juego 3: “Ganas si obtienes un número mayor que 3”
  - Juego 4: “Ganas si obtienes un número que es múltiplo de 3”
- A) 0                              B) 1                              C) 2                              D) 3                              E) 4
8. Al hacer una encuesta a un grupo de once personas acerca del número de hermanos que tienen, resultó que la media y la moda de las respuestas obtenidas es igual a 2. Se sabe también que exactamente cuatro personas respondieron 3 y que ninguna respondió un número mayor que 3. ¿Cuántas personas respondieron 1?
- A) 4                              B) 3                              C) 2                              D) 1                              E) Ninguna



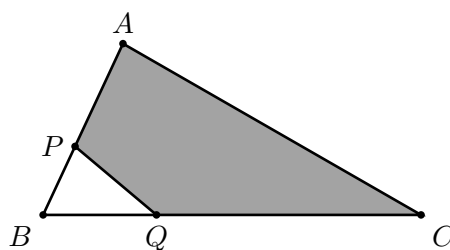
### Primera Fase - Nivel 3

9. Una *diagonal interior* de un poliedro es un segmento que une dos vértices del poliedro de tal forma que dicho segmento no está incluido en una cara del poliedro. Por ejemplo, un tetraedro no tiene diagonales interiores, mientras que un cubo tiene 4 diagonales interiores, como se muestra en la siguiente figura.



¿Cuántas diagonales interiores tiene un prisma recto cuyas bases son octágonos?

- A) 64                      B) 40                      C) 56                      D) 8                      E) 16
10. La suma de las edades de tres hermanos es 47. Si sus edades son distintas, ¿cuál es el mayor valor posible de la edad del hermano menor?
- A) 16                      B) 13                      C) 17                      D) 14                      E) 15
11. Sandra dibujó un triángulo  $ABC$ . Luego, ubicó los puntos  $P$  y  $Q$ , como se muestra en la figura, de tal forma que  $BP = 2$ ,  $PA = 3$ ,  $BQ = 3$  y  $QC = 7$ .



¿Qué porcentaje del área del triángulo  $ABC$  representa el área de la región sombreada?

- A) 84 %                      B) 88 %                      C) 90 %                      D) 75 %                      E) 66 %
12. A Javier le han regalado un gran chocolate que pesa 1 kg. Él decide consumirlo de la siguiente manera: el primer día consumirá la mitad del chocolate; el segundo día, la mitad de lo que queda y así sucesivamente. La expresión que representa el consumo del chocolate durante los primeros  $n$  días es:

- A)  $\frac{n}{2}$  kg                      B)  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$  kg                      C)  $\frac{1}{2^n}$  kg                      D)  $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$  kg                      E)  $\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$  kg



### Primera Fase - Nivel 3

13. Una empresa de celulares ofrece tres planes de servicio: básico, intermedio y completo. En el mes de enero la distribución de clientes por plan fue la mostrada en la Tabla 1. En el mes de febrero, entraron 400 nuevos clientes al plan básico, algunos del plan básico se cambiaron al plan intermedio y algunos del plan intermedio se cambiaron al plan completo. Ningún cliente se retiró. La distribución de los clientes en el mes de febrero fue la mostrada en la Tabla 2.

| ENERO      |            |
|------------|------------|
| PLAN       | PORCENTAJE |
| Básico     | 50 %       |
| Intermedio | 30 %       |
| Completo   | 20 %       |

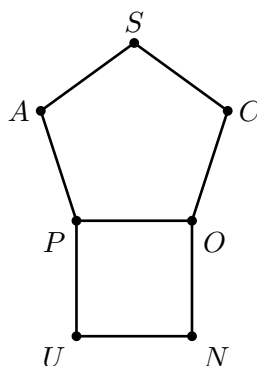
Tabla 1

| FEBRERO    |            |
|------------|------------|
| PLAN       | PORCENTAJE |
| Básico     | 51 %       |
| Intermedio | 29 %       |
| Completo   | 20 %       |

Tabla 2

¿Cuántos clientes se cambiaron del plan intermedio al completo?

- A) 50                      B) 60                      C) 30                      D) 100                      E) 80
14. En la siguiente figura se muestra un cuadrado *PUNO* y un pentágono regular *PASCO*. Determine el valor de  $n$  para el cual los puntos  $A, P, U$  (en ese orden) son vértices consecutivos de un polígono regular de  $n$  lados.



- A) 15                      B) 12                      C) 20                      D) 16                      E) 10
15. Araceli dibujó en el plano cartesiano la gráfica de una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

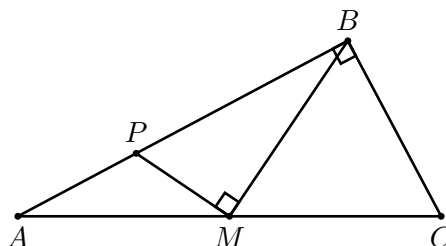
donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes. Ella notó que los siguientes puntos del plano cartesiano pertenecen a su gráfica:  $(0, 7)$ ,  $(2, 5)$  y  $(3, 10)$ . ¿Cuál de los siguientes puntos también pertenece a la gráfica de Araceli?

- A)  $(1, 3)$                       B)  $(4, 18)$                       C)  $(-1, 0)$                       D)  $(5, 32)$                       E)  $(-2, 15)$



### Primera Fase - Nivel 3

16. Un número natural  $N$  es llamado *cuasi-divisible* si al sumar 1 a cualquiera de sus dígitos obtenemos un divisor de  $N$ . Por ejemplo, 102 es cuasi-divisible porque  $1 + 1$ ,  $0 + 1$  y  $2 + 1$  son divisores de 102. Determine el mayor número cuasi-divisible que consta de tres dígitos distintos y dé como respuesta la suma de los cuadrados de sus dígitos.
- A) 145                      B) 162                      C) 82                      D) 97                      E) 130
17. ¿Cuántos enteros positivos de 11 dígitos son múltiplos de 162 y cumplen que cada uno de sus dígitos es 0 o 9?
- Aclaración:* Tenga en cuenta que un entero positivo no empieza con el dígito 0.
- A) 11                      B) 15                      C) 36                      D) 10                      E) 9
18. En la pizarra están escritos 8 números naturales que forman una progresión aritmética. Se sabe que exactamente  $M$  de esos números son múltiplos de 3. ¿Cuál de los siguientes números **no** es un posible valor de  $M$ ?
- A) 0                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 8
19. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo, recto en  $B$ , donde  $M$  es el punto medio de su hipotenusa. En el segmento  $AB$  se ubica un punto  $P$  tal que  $\angle BMP = 90^\circ$ . Si  $AP = 7$  y  $PB = 18$ , determine la medida de  $AC$ .



- A) 30                      B) 32                      C) 35                      D)  $14\sqrt{5}$                       E)  $\sqrt{706}$
20. Alrededor de una circunferencia están escritos 14 enteros positivos, no necesariamente distintos. Antonio subrayó cada número que es igual a la suma de sus dos vecinos. Luego, Blanca subrayó cada número que es igual al valor absoluto de la diferencia de sus dos vecinos. ¿Como máximo cuántos números subrayados puede haber después de hacer esto?
- A) 14                      B) 13                      C) 12                      D) 10                      E) 7

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

### Segunda Fase - Nivel 3

28 de agosto de 2018

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas y verifica que se ponga la hora en la que estás entregando. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- **No puedes llevar estas hojas que contienen los enunciados.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

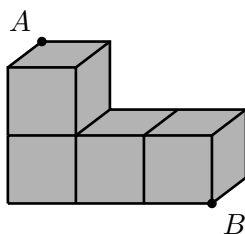
ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Para el campeonato deportivo que organiza una institución educativa, quince costureras elaboraron 300 polos en 4 horas de trabajo. ¿Cuántos polos pueden elaborar diez costureras en 5 horas de trabajo?
2. Una empresa vende frutas y verduras. Según los datos del mes pasado, del número total de kilogramos vendidos, el  $n\%$  corresponden a las frutas. Además, del número total de kilogramos de fruta vendidos, el  $n\%$  corresponden a manzanas. Determine el valor de  $n$ , si se sabe que del número total de kilogramos vendidos, el  $16\%$  corresponden a manzanas.



### Segunda Fase - Nivel 3

3. La siguiente figura se hizo con 4 cubos de 1 cm de lado. Si la medida del segmento cuyos extremos son los vértices  $A$  y  $B$  es  $\sqrt{n}$  cm, calcule el valor de  $n$ .



4. Los números enteros positivos  $a$ ,  $b$  y  $c$  satisfacen las siguientes desigualdades:

$$a < 2b, \quad b < 2c \quad \text{y} \quad c < 18.$$

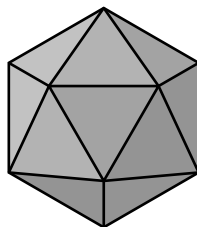
Determine el mayor valor posible de  $a$ .

5. Un grupo de  $m + n$  personas está repartido en dos salones. En el primer salón hay  $m$  personas cuyo promedio de edades es 24. En el segundo salón hay  $n$  personas cuyo promedio de edades es 36. Una persona se trasladó del segundo salón al primero y al hacer esto sucedió que cada uno de los dos salones aumentó su promedio de edades en 1. Determine el valor de  $m + n$ .

6. La media de siete datos es 7 y se sabe que los cinco primeros datos son 1, 3, 5, 11 y 5. ¿Cuál es el menor valor posible de la varianza de los siete datos?

*Aclaración:* Recuerde que la *varianza* de los datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se define como la media de los números  $(x_1 - m)^2, (x_2 - m)^2, \dots, (x_n - m)^2$ , donde  $m$  es la media de los datos. Por ejemplo, la varianza de los tres datos 1, 3, 8 es  $\frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (8-4)^2}{3} = \frac{26}{3}$ .

7. Se escogen al azar dos caras distintas de un icosaedro regular (que tiene 20 caras que son triángulos equiláteros). Sea  $p$  la probabilidad de que dichas caras sean disjuntas, es decir, que no compartan un vértice o una arista. Calcule el valor de  $\frac{60}{p}$ .



*Aclaración:* Considere que todas las caras tienen la misma probabilidad de ser escogidas.



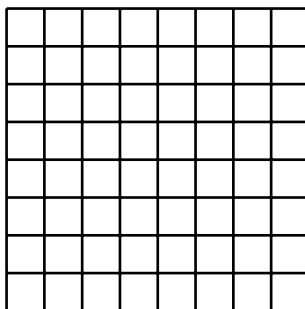
### Segunda Fase - Nivel 3

8. Sean  $x$  y  $y$  números reales positivos tales que  $x \neq y$  y además:

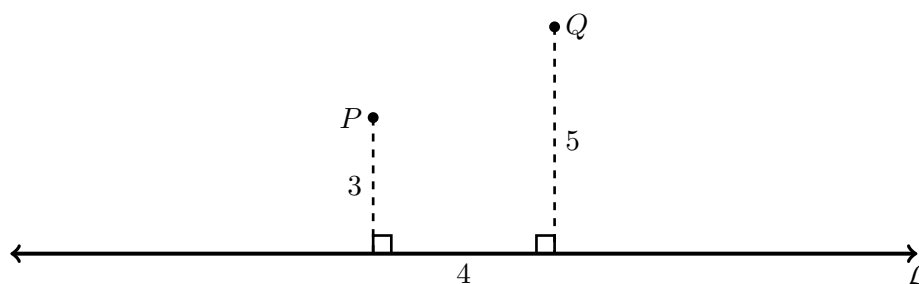
$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy}.$$

Determine el menor valor posible de  $(1+2x^2)(1+18y^2)$ .

9. Cada casilla de un tablero de  $8 \times 8$  se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cada subtablero de  $3 \times 3$  tenga al menos una casilla de cada uno de los tres colores. ¿Cuántas casillas rojas puede haber como máximo?



10. En la figura se muestra una recta  $\mathcal{L}$  y dos puntos  $P$  y  $Q$  a un mismo lado de ella. Las distancias de  $P$  y  $Q$  a  $\mathcal{L}$  son 3 cm y 5 cm, respectivamente. La distancia entre los pies de las proyecciones de  $P$  y  $Q$  sobre  $\mathcal{L}$  es 4 cm.



Hay dos circunferencias tales que cada una pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ , y es tangente a  $\mathcal{L}$ . Calcule la suma de los radios de esas dos circunferencias, en cm.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



**PERÚ**Ministerio  
de Educación

Sociedad Matemática Peruana

**XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)****Tercera Fase - Nivel 3**

4 de octubre de 2018

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas (120 minutos) para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas y asegúrate de que hayas guardado tus respuestas en el sistema. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega, registrada en el sistema.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

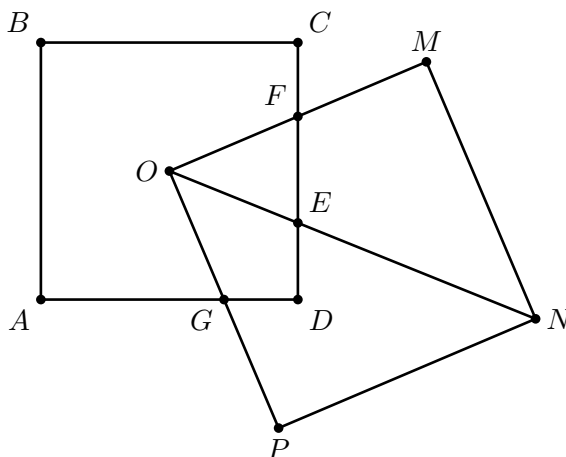
1. En una fábrica se producen bolas de hierro de dos tamaños: pequeñas, de 4 cm de diámetro, y grandes, de 8 cm de diámetro. ¿Cuántas bolas pequeñas pesan lo mismo que 6 bolas grandes?
2. Un alumno escribió en su cuaderno un número de dos dígitos; luego, lo multiplicó por 2 y obtuvo así otro número de dos dígitos. Después invirtió el orden de los dígitos del resultado y, finalmente, restó 60. Si el número final es igual al inicial, determine la suma de los dígitos del número inicial.
3. La ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + 5 = 0$  tiene raíces reales  $r_1$  y  $r_2$ . La ecuación cuadrática  $bx^2 + ax + 5 = 0$  tiene raíces reales  $t_1$  y  $t_2$ . Si se sabe que  $a \neq b$  y  $|r_1 - r_2| = |t_1 - t_2|$ , calcule el valor de

$$(a + b) \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right).$$



### Tercera Fase - Nivel 3

4. Un poliedro tiene exactamente ocho caras, de las cuales cuatro son hexágonos regulares y cuatro son triángulos equiláteros. ¿Cuántos vértices tiene dicho poliedro?
5. En una caja hay canicas rojas y azules. Si se escoge al azar dos canicas de la caja, la probabilidad de que sean del mismo color es  $\frac{1}{2}$ . Determine cuántas canicas hay en la caja si se sabe que este número es mayor que 50, pero menor que 80.
6. Ana escoge secretamente 5 números del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y le dice su producto a Beto (Ana no le dice los números, solo le dice el producto). Conociendo el producto, Beto no puede saber si la suma de los cinco números que escogió Ana es par o impar. ¿Cuál fue el número que le dijo Ana a Beto?
7. En la figura mostrada,  $ABCD$  y  $OMNP$  son cuadrados, donde  $O$  es el centro del cuadrado  $ABCD$ . Si  $AG = 36$  y  $DE = 16$ , calcule  $FC$ .



8. En un torneo de vóley participaron  $k$  equipos y cada equipo se enfrentó a cada uno de los otros exactamente una vez. Al final del torneo se notó que exactamente el 80 % de los equipos ganó al menos 2 partidos. Calcule la suma de todos los posibles valores de  $k$ .  
*Aclaración:* Considere que en el vóley un partido no puede quedar en empate.



Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

### Tercera Fase - Nivel 3

---

9. Un triángulo  $ABC$  tiene ángulos cuyas medidas cumplen la condición  $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ . Si el mayor valor posible de  $\cos A + \cos C$  es  $\lambda$ , calcule el valor de  $(24\lambda)^2$ .
10. Una permutación  $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$  de  $1, 2, \dots, 1000$  es llamada *buen*a si cumple la siguiente condición: Si  $n$  y  $m$  son enteros positivos tales que  $n$  es múltiplo de  $m$ , con  $1 \leq n \leq 1000$  y  $1 \leq m \leq 1000$ , entonces  $a_n$  es múltiplo de  $a_m$ . Determine el menor entero positivo  $k$  para el cual existe una permutación buena  $b_1, b_2, \dots, b_{1000}$  tal que  $b_k \neq k$ .

*Aclaración:* Una permutación es una forma de ordenar los elementos de un conjunto. Por ejemplo, 4, 2, 1, 3, 5 es una permutación de 1, 2, 3, 4, 5.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

### Cuarta Fase - Nivel 3

11 de noviembre de 2018

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
  - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
  - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
- 

1. Encuentre un número de cuatro dígitos  $\overline{PERU}$  que cumpla la propiedad

$$\overline{PERU} = (P + E + R + U)^U.$$

Además, demuestre que hay exactamente un número de cuatro dígitos que cumple esa propiedad.

2. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales tales que

$$a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1.$$

- a) Pruebe que  $ab + bc + ca = 0$  y  $a + b + c = 3$ .  
b) Pruebe que  $|a| + |b| + |c| < 5$ .



### Cuarta Fase - Nivel 3

---

3. Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo tal que  $BA = BC$ . En los lados  $BA$  y  $BC$  se escogen los puntos  $D$  y  $E$ , respectivamente, tales que  $DE$  y  $AC$  son paralelos. Sea  $H$  el ortocentro del triángulo  $DBE$  y  $M$  el punto medio de  $AE$ . Si  $\angle HMC = 90^\circ$ , determine la medida del ángulo  $\angle ABC$ .

*Aclaración:* El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.

4. Un tablero de  $100 \times 200$  tiene  $k$  casillas pintadas de negro. Una *operación* consiste en escoger un subtablero de  $2 \times 3$  o de  $3 \times 2$  que tenga exactamente 5 casillas negras y pintar de negro la casilla que falta. Determine el menor valor de  $k$  para el cual existe una distribución inicial de las  $k$  casillas negras tal que luego de algunas operaciones se pueda conseguir que todas las casillas del tablero sean negras.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XVI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2019)

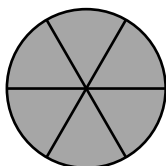
### Primera Fase - Nivel 3

10 de julio de 2019

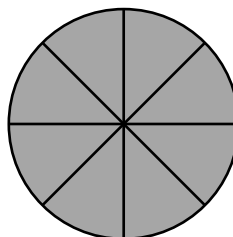
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- **Entrega tu hoja de respuestas y el cuadernillo de preguntas** tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Escribe tus datos (nombre, grado, etc) y la hora de entrega con lapicero. Te recomendamos que marques tus respuestas con lápiz.
- **Importante: Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de esta prueba por ningún medio.**

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Sara tiene 20 soles en monedas de 10, 20 y 50 céntimos. Ella tiene la misma cantidad de monedas de cada tipo. ¿Cuántas monedas tiene en total?  
A) 60                      B) 45                      C) 90                      D) 48                      E) 75
2. Una cocina y un refrigerador cuestan juntos 2019 soles. Se sabe que el 40 % del costo de la cocina equivale al 20 % del costo del refrigerador. ¿Cuántos soles más cuesta el refrigerador que la cocina?  
A) 447                      B) 673                      C) 523                      D) 1224                      E) 1346
3. Suponga que el precio de una pizza es proporcional a su área. Se sabe que una pizza grande tiene 30 cm de diámetro y se divide en 6 porciones iguales. Además, una pizza familiar tiene 40 cm de diámetro y se divide en 8 porciones iguales. Si el precio de una porción de pizza grande es 4 soles y 50 céntimos, ¿cuál es el precio de una porción de pizza familiar?



pizza grande



pizza familiar

- A) 4 soles y 50 céntimos    B) 5 soles    C) 8 soles    D) 6 soles    E) 5 soles y 40 céntimos



### Primera Fase - Nivel 3

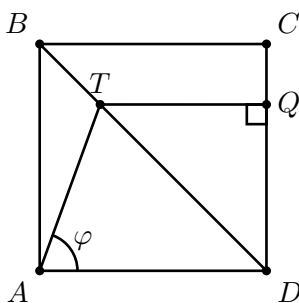
4. Con respecto a siete datos recopilados en una encuesta se tiene la siguiente información:

- Cinco datos son: 8, 6, 3, 8, 5.
- La moda de los datos no es 8.

Calcule la media de estos siete datos si se sabe que es un número entero.

- A) 6                      B) 4                      C) 5                      D) 7                      E) 8

5. En la figura se observa un cuadrado  $ABCD$  de lado  $\ell$ ,  $T$  es un punto de la diagonal  $BD$  y  $TQ$  es perpendicular al lado  $CD$ . Si  $CQ = a$ , calcule  $\tan \varphi$  en función de  $a$  y  $\ell$ .



- A)  $\frac{\ell}{a} - 1$                       B)  $\frac{\ell - a}{a\sqrt{2}}$                       C)  $\frac{\ell}{a}$                       D)  $\frac{a}{\ell}$                       E)  $\frac{a}{\ell - a}$

6. En un encuentro científico internacional, que duró 2 semanas, participaron brasileños, peruanos y colombianos. La distribución de asistentes en la primera semana fue la siguiente:

|             | Porcentaje |
|-------------|------------|
| Brasileños  | 28 %       |
| Peruanos    | 32 %       |
| Colombianos | 40 %       |

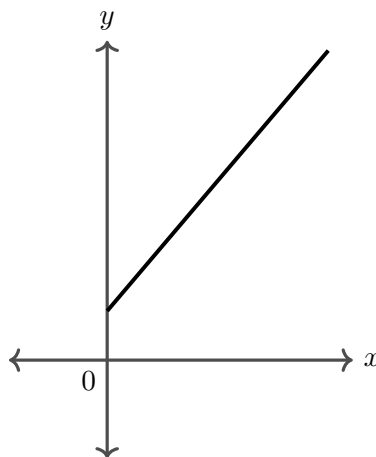
En la segunda semana todos continuaron participando del encuentro a excepción de la mitad de los colombianos, que tenían planeado viajar. ¿Cuál fue el porcentaje de peruanos al finalizar el encuentro científico?

- A) 50 %                      B) 36 %                      C) 48 %                      D) 40 %                      E) 32 %



### Primera Fase - Nivel 3

7. En cada alternativa se muestran dos cantidades  $x$  y  $y$  que se pueden relacionar por medio de un gráfico en el plano cartesiano. Indique la alternativa cuyo gráfico no puede ser el siguiente:



- A)  $x$  = tiempo transcurrido después del medio día,  $y$  = cantidad de agua en un recipiente.  
B)  $x$  = tiempo transcurrido después del medio día,  $y$  = velocidad de un automóvil.  
C)  $x$  = longitud medida en centímetros,  $y$  = longitud medida en pulgadas.  
D)  $x$  = temperatura en  $^{\circ}\text{C}$ ,  $y$  = temperatura en  $^{\circ}\text{F}$ .  
E)  $x$  = tiempo transcurrido después del medio día,  $y$  = altura de un avión.
8. Se lanzó al aire un objeto y su altura (expresada en metros) viene dada por la fórmula  $vt - 4,9t^2 + 20$ , donde  $v$  es una constante y  $t$  es la cantidad de segundos que el objeto lleva en el aire. Se sabe que la altura máxima del objeto ocurre cuando  $t = 5$ . Determine el valor de  $v$ .
- A) 4,9                      B) 9,8                      C) 49                      D) 20                      E) 98
9. Con los dígitos  $a, b, c, d, e$  y  $f$ , que son distintos entre sí, Carlos formó el número de tres dígitos  $\overline{def}$  y Emilio formó el número de tres dígitos  $\overline{abc}$ . Si el número de Carlos es mayor en 9 que el número de Emilio, determine el menor valor posible de  $a + b + c$ .

*Aclaración:* Tenga en cuenta que  $a \neq 0$  y  $d \neq 0$ .

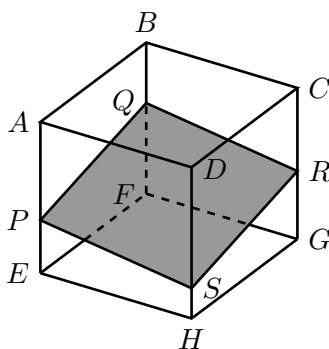
- A) 11                      B) 12                      C) 13                      D) 14                      E) 15





### Primera Fase - Nivel 3

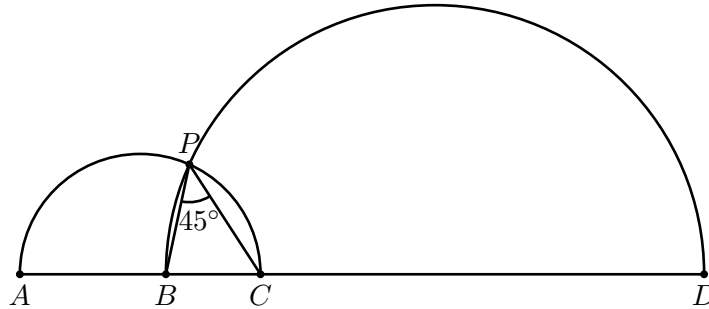
10. Se tiene un cubo  $ABCD-EFGH$ , como se muestra en la figura. Un plano corta a las aristas  $AE$ ,  $BF$ ,  $CG$  y  $DH$  en los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$ , respectivamente. Se sabe que  $EP = 11$ ,  $FQ = 24$  y  $GR = 20$ , calcule la longitud de  $HS$ .



- A) 6                      B) 7                      C) 8                      D) 9                      E) 10
11. Los pesos de 12 niños, en kg, son:  
 $28, 32, 29, 32, 28, 30, 30, 27, 31, 32, 31, 32$ .
- Encuentre un número real  $x$  para el cual se cumplen las siguientes dos condiciones:
- Como máximo el 25 % de los niños pesa  $x$  kg o menos.
  - Como máximo el 75 % de los niños pesa  $x$  kg o más.
- A) 27,5                      B) 28                      C) 28,5                      D) 29                      E) 29,5
12. Se sabe que el 3,5 % del peso del agua de mar es sal, es decir, un kilogramo de agua de mar contiene 35 gramos de sal. Además, 1 litro de agua pura pesa 1kg y 1 litro de agua de mar pesa 1,029 kg. Determine cuántos litros de agua pura hay que agregar a 1000 litros de agua de mar para que el 3 % del peso de la mezcla resultante sea sal.
- A) 165,5                      B) 150                      C) 205,8                      D) 156,5                      E) 171,5
13. Se lanzaron dos dados comunes y la suma de los números obtenidos resultó ser par. ¿Cuál es la probabilidad de que los números obtenidos hayan sido iguales?
- Aclaración:* Un dado común tiene en sus caras los números del 1 al 6 y cada uno tiene igual probabilidad de salir.
- A)  $\frac{1}{6}$                       B)  $\frac{2}{9}$                       C)  $\frac{1}{2}$                       D)  $\frac{1}{4}$                       E)  $\frac{1}{3}$

Primera Fase - Nivel 3

14. En la figura se muestra dos semicircunferencias de diámetros  $AC$  y  $BD$ , que se intersecan en  $P$ . Si  $AB = 3$  y  $BC = 2$ , calcule la longitud de  $CD$ .



- A) 9                      B) 12                      C) 10                      D) 15                      E) 8

15. Para cada una de las siguientes proposiciones determine si es verdadera (V) o falsa (F):

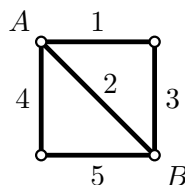
- Existen números reales  $a, b$  y  $c$  tales que  $a < b < c$  y  $c^2 < b^2 < a^2$ .
- Existen números reales  $a, b$  y  $c$  tales que  $a < b < c$  y  $a^2 < c^2 < b^2$ .
- Existen números reales  $a, b$  y  $c$  tales que  $a < b < c$  y  $b^2 < a^2 < c^2$ .

- A) VFV                      B) VFF                      C) FFV                      D) FVF                      E) VVF

16. Un número entero positivo  $N = \overline{d_0d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8d_9}$  de 10 dígitos tiene exactamente  $d_0$  dígitos iguales a 0,  $d_1$  dígitos iguales a 1,  $d_2$  dígitos iguales a 2, ...,  $d_9$  dígitos iguales a 9. Determine el resto de dividir  $N$  entre 36.

- A) 12                      B) 28                      C) 19                      D) 16                      E) 10

17. Se muestran cuatro ciudades que están unidas por cinco pistas como se muestra a continuación. Debido a diversos motivos una pista puede estar bloqueada. Si escogemos cualquier pista, la probabilidad de que esté bloqueada es  $p$ .



Calcule la probabilidad de que **no** sea posible ir de  $A$  a  $B$ .

*Ejemplos:* Si solo está bloqueada la pista 2, es posible ir de  $A$  a  $B$  mediante las pistas 1 y 3. Por otro lado, si las pistas 2, 3 y 4 están bloqueadas no es posible ir de  $A$  a  $B$ .

- A)  $p^5$                       B)  $p^3(2-p)^2$                       C)  $p^4(1-p)^2$                       D)  $p(1-p^2)^2$                       E)  $p^2(1-p)^3$



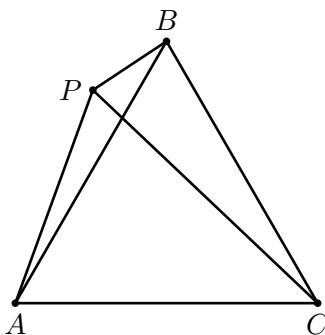
### Primera Fase - Nivel 3

18. Sean  $a, b, c, d$  y  $e$  números reales no nulos. Determine como máximo cuántos números negativos puede haber entre los siguientes 10 números reales:

$$a, b, c, d, e, ab, bc, cd, de, ea.$$

*Aclaración:*  $ab$  es el producto de los números  $a$  y  $b$ . Análogamente,  $bc, cd, de$  y  $ea$  también denotan productos.

- A) 5                      B) 6                      C) 7                      D) 8                      E) 9
19. Amelia es la encargada de la limpieza de un edificio. Ella trabaja todos los días impares del mes (por ejemplo, trabaja el 11 de mayo, 19 de setiembre, 21 de diciembre, etc) y, además, trabaja todos los martes, todos los jueves y todos los sábados. ¿Como máximo cuántos días consecutivos puede trabajar Amelia?
- A) 7                      B) 9                      C) 14                      D) 12                      E) 16
20. Sea  $ABC$  un triángulo equilátero, el punto  $P$  fuera del triángulo  $ABC$  cumple que  $\angle APC = 70^\circ$  y  $\angle BPC = 85^\circ$ . Se sabe que existe un triángulo  $\mathcal{T}$  cuyos lados miden  $AP, BP$  y  $CP$ . Calcule la diferencia entre las medidas del mayor y menor ángulos de  $\mathcal{T}$ .



- A)  $120^\circ$                       B)  $90^\circ$                       C)  $110^\circ$                       D)  $125^\circ$                       E)  $135^\circ$

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XVI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2019)

### Segunda Fase - Nivel 3

21 de agosto de 2019

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas y verifica que se ponga la hora en la que estás entregando. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- **No puedes llevar estas hojas que contienen los enunciados.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Un anillo pesa 10 gramos y es tal que el 70 % de su peso es oro y el 30 % es plata. Un joyero fundió el anillo, agregó 1 gramo de plata y  $k$  gramos de oro para hacer un nuevo anillo. Calcule el valor de  $k$  si sabe que el 75 % del peso del nuevo anillo es oro.
2. César y Daniel son dos corredores que salieron ambos de  $A$  en dirección a  $B$ , con velocidades de 9 km/h y 6km/h, respectivamente. Cuando César llegó a  $B$  regresó inmediatamente y siguió corriendo a 9km/h. Si César se cruzó con Daniel a 3 km de  $B$ , ¿cuál es la distancia entre  $A$  y  $B$  (en km)?





### Segunda Fase - Nivel 3

3. Una empresa se dedica a fabricar y vender panetones. La empresa vende sus panetones a dos distribuidores y también los vende directamente. Al distribuidor 1 le ofrece 35 % de descuento sobre el precio normal, al distribuidor 2 le ofrece 30 % de descuento sobre el precio normal y en ventas directas, al precio normal (sin descuento). En el siguiente cuadro se muestra las cantidades vendidas el año pasado:

|                | Descuento | Unidades vendidas |
|----------------|-----------|-------------------|
| Distribuidor 1 | 35 %      | 2400              |
| Distribuidor 2 | 30 %      | 1250              |
| Venta directa  | 0 %       | 469               |

Si el ingreso total del año pasado fue 46464 soles. ¿Cuál es el precio normal de un panetón (en soles)?

4. Un comerciante compró cierta cantidad de papas a un agricultor en Huancayo y lo vendió en Lima, obteniendo una ganancia de 400 soles. Con todo el dinero obtenido por la venta regresó a Huancayo, compró papas al mismo agricultor (al mismo precio) y lo vendió en Lima (también al mismo precio de venta que la primera vez), pero ahora obteniendo una ganancia de 480 soles. ¿Cuántos soles pagó el comerciante al agricultor por su primera compra?
5. Sea  $ABCD$  un rectángulo de centro  $O$ . Sea  $E$  el punto del plano tal que  $A$  es el punto medio del segmento  $BE$  y sea  $F$  el punto del plano tal que  $B$  es el punto medio del segmento  $OF$ . Si  $EF = EC = \sqrt{112}$ , determine la longitud del segmento  $AC$ .
6. Los enteros positivos  $a$  y  $b$  cumplen que la diferencia entre su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor es 10. Determine cuántos valores distintos puede tomar  $a + b$ .
7. Cuatro hombres y cuatro mujeres se van a sentar alrededor de una mesa circular que tiene ocho asientos. Si las ocho personas se sientan al azar en los ocho asientos, la probabilidad de que los hombres y mujeres queden sentados de forma alternada es  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos coprimos. Calcule el valor de  $a + b$ .

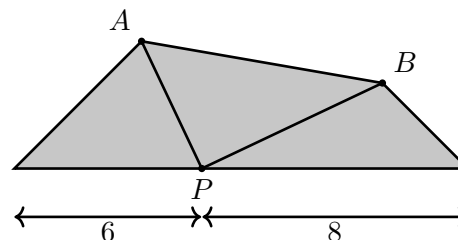
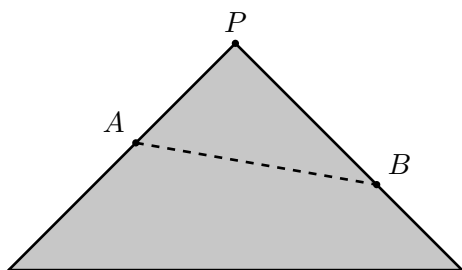


### Segunda Fase - Nivel 3

8. La sucesión  $F_1, F_2, F_3, \dots$  (conocida como sucesión de Fibonacci) es definida por  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$  y  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , para todo  $n \geq 1$ . Los primeros términos de esta sucesión son  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$ ,  $F_5 = 5$ , etc. Halle el número entero  $m$  para el cual se cumple que

$$m \leq \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_{2018} + F_{2019}}{F_{2019}} < m + 1.$$

9. En la figura de la izquierda se muestra un papel en forma de triángulo rectángulo isósceles al que se le hizo un doblez a través del segmento  $AB$ , de tal forma que el vértice  $P$  quede en el lado mayor, como se muestra en la figura de la derecha.



Si la longitud del segmento  $AB$  es  $\frac{a\sqrt{2}}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos coprimos, calcule  $a - b$ .

10. Orlando tiene 80 varillas de metal cuyas longitudes son 1 cm, 2 cm, 3 cm,  $\dots$ , 79 cm y 80 cm. Él escogió  $k$  de esas varillas de tal manera que se puede construir un **triángulo acutángulo** con cualesquiera tres varillas escogidas, determine el mayor valor de  $k$  para el cual esta situación es posible.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

**PERÚ**Ministerio  
de Educación

Sociedad Matemática Peruana

**XVI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2019)****Tercera Fase - Nivel 3**

26 de setiembre de 2019

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas (120 minutos) para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas y asegúrate de que hayas guardado tus respuestas en el sistema. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega, registrada en el sistema.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Una empresa de venta por internet determina el costo de envío de un paquete de la siguiente forma: si lo que has comprado pesa  $p$  kilogramos y deseas recibirlo luego de  $n$  días, el costo de envío (en soles) es:

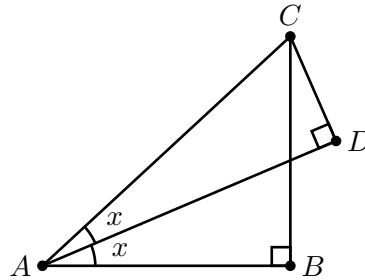
$$\frac{24(p+2)}{n+2}.$$

Franco pidió un producto para recibirlo en dos días. Gustavo pidió dos productos (iguales a los que pidió Franco) para recibirlo en cuatro días. Si Franco pagó 1 sol más de lo que pagó Gustavo por concepto de costo de envío, ¿cuántos soles pagó Franco por el mismo concepto?

2. Encuentre el menor entero positivo  $k$  para el cual la siguiente proposición es falsa: “Si la suma de los dígitos de un entero positivo de seis dígitos es  $k$ , entonces al menos tres de sus dígitos son iguales”.

**Tercera Fase - Nivel 3**

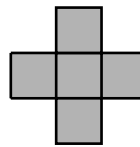
3. En la siguiente figura,  $ABC$  y  $ADC$  son triángulos rectángulos, rectos en  $B$  y  $D$ , respectivamente. Si  $\angle CAD = \angle DAB = x$ ,  $AB = 7$  y  $CD = 3$ , calcule el valor de  $42 \sin x$ .



4. Sean  $a$  y  $b$  dos divisores del número 3920 tales que  $0 < a < b < 3920$ . Determine cuántos valores distintos puede tomar el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ .
5. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo, recto en  $B$ , tal que  $\angle BAC = 41^\circ$ . Sea  $M$  el punto medio del lado  $AC$ . La mediatriz del segmento  $AM$  intersecta al segmento  $AB$  en  $P$  y la mediatriz del segmento  $MC$  intersecta al segmento  $BC$  en  $Q$ . Determine la medida del ángulo  $\angle BQP$ .
- Aclaración:* La mediatriz de un segmento es la recta que es perpendicular a dicho segmento y pasa por su punto medio.
6. Un entero positivo  $n$  es llamado aceptable si con  $2n^2$  fichas del tipo 1 y  $n^2$  fichas del tipo 2 se puede armar un tablero de  $3n \times 3n$  (sin salirse del tablero).



Tipo 1



Tipo 2

Si hacemos una lista con todos los números aceptables, ordenados de menor a mayor, determine el cuarto número de la lista.

*Aclaración:* Considere que las fichas se pueden rotar.

7. Sean  $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, \dots, 3000\}$  y  $k$  el número de subconjuntos de  $\mathcal{C}$  que tienen exactamente 1000 elementos. Determine el mayor número primo de tres dígitos que es divisor del número  $k$ .





### Tercera Fase - Nivel 3

---

8. Sean  $x$  y  $y$  números reales tales que:

$$x^2 - xy + y^2 = 5x + 6y - 13.$$

Determine el mayor valor posible de  $\frac{8y}{x}$ .

9. Un conjunto finito  $\mathcal{X}$  está formado por  $n$  números reales distintos. Se sabe que para cualesquiera dos elementos distintos  $a$  y  $b$  de  $\mathcal{X}$ , existe un elemento  $c$  de  $\mathcal{X}$  tal que los números  $a, b, c$  forman una progresión aritmética en algún orden. Determine el mayor valor posible de  $n$ .
10. Sea  $\mathcal{M}$  el conjunto de los 64 puntos del espacio que tienen coordenadas enteras  $(a, b, c)$  tales que  $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Una rana debe ir del punto  $(0, 0, 0)$  al punto  $(3, 3, 3)$  de acuerdo a las siguientes reglas:
- Solo puede saltar a puntos de  $\mathcal{M}$ .
  - No puede pasar más de una vez por el mismo punto.
  - En cada salto puede ir del punto  $(x, y, z)$  a uno de los puntos  $(x + 1, y, z)$ ,  $(x, y + 1, z)$ ,  $(x, y, z + 1)$  o  $(x, y, z - 1)$ .

Determine el número de maneras distintas en que la rana puede lograr su objetivo y dé como respuesta la suma de los dígitos de dicho número.



## XVI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2019)

### Cuarta Fase - Nivel 3

27 de octubre de 2019

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

1. Determine para qué números enteros  $n \geq 3$  es posible encontrar números enteros positivos  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  tales que  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$  y  $a_1 a_2 \dots a_n$  es un cuadrado perfecto.
2. Halle todos los números reales  $k$  que tienen la siguiente propiedad: Para cualesquiera números reales no nulos  $a$  y  $b$  se cumple que al menos uno de los siguientes números:

$$a, \quad b, \quad \frac{5}{a^2} + \frac{6}{b^3}$$

es menor o igual que  $k$ .

3. En el trapecio  $ABCD$ , la base  $AB$  es menor que la base  $CD$ . El punto  $K$  se escoge de tal forma que  $AK$  es paralelo a  $BC$  y  $BK$  es paralelo a  $AD$ . Los puntos  $P$  y  $Q$  se escogen en los rayos  $AK$  y  $BK$ , respectivamente, de tal forma que  $\angle ADP = \angle BCK$  y  $\angle BCQ = \angle ADK$ .
  - a) Demuestre que las rectas  $AD$ ,  $BC$  y  $PQ$  pasan por un mismo punto.
  - b) Suponga que las circunferencias circunscritas de los triángulos  $APD$  y  $BKQ$  se intersecan en dos puntos, demuestre que uno de esos puntos pertenece a la recta  $PQ$ .



PERÚ

Ministerio  
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

### Cuarta Fase - Nivel 3

---

4. Un tablero que tiene algunas de sus casillas pintadas de negro es llamado *acceptable* si no hay cuatro casillas negras que forman un subtablero de  $2 \times 2$ .

Halle el mayor número real  $\lambda$  tal que para todo entero positivo  $n$  se cumple la siguiente propiedad: si un tablero de  $n \times n$  es *acceptable* y tiene menos de  $\lambda n^2$  casillas negras, entonces se puede pintar de negro una casilla adicional de tal forma que el tablero siga siendo *acceptable*.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XVII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

### Segunda Fase - Nivel 3

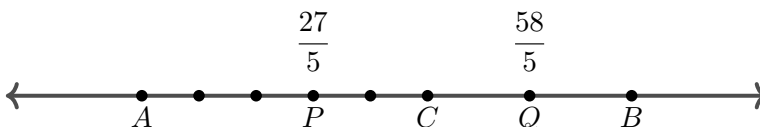
16 de setiembre de 2021

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas por correo electrónico. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

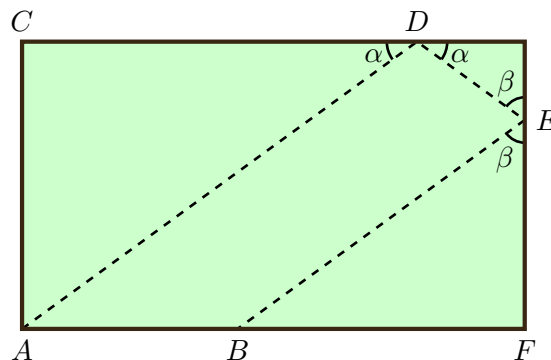
1. En la recta numérica se marcaron los puntos  $A$  y  $B$ , luego, se marcó el punto  $C$  tal que la longitud de  $AC$  es a la longitud de  $CB$  como 4 es a 3. Luego, el segmento  $AC$  se dividió en cinco partes iguales mediante cuatro puntos, uno de los cuales es  $P$ . Finalmente, se marcó  $Q$ , el punto medio del segmento  $CB$ . Si el punto  $P$  corresponde a la fracción  $\frac{27}{5}$  y el punto  $Q$  corresponde a la fracción  $\frac{58}{5}$ , calcule la longitud del segmento  $AB$ .



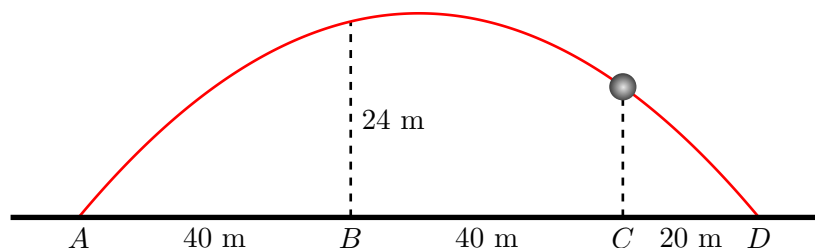
2. En un experimento Kusi obtuvo 55 datos: 20 datos iguales a 10, 15 datos iguales a 11 y 20 datos iguales a 12, donde la mediana es 11. Kusi desea descartar algunos de los datos empezando por los más grandes de tal modo que la mediana sea 10. ¿Cuántos datos Kusi debe descartar como mínimo?
3. En un partido de fútbol se otorga 3 puntos al equipo ganador, 0 puntos al perdedor y 1 punto a cada equipo en caso de empate. En el grupo B de la copa América hubo 5 equipos y cualesquiera dos equipos jugaron un partido. De los 10 partidos que se jugaron en total, determine cuántos terminaron en empate, si al finalizar los puntajes fueron los siguientes:

|           |    |
|-----------|----|
| Argentina | 10 |
| Uruguay   | 7  |
| Paraguay  | 6  |
| Chile     | 5  |
| Bolivia   | 0  |

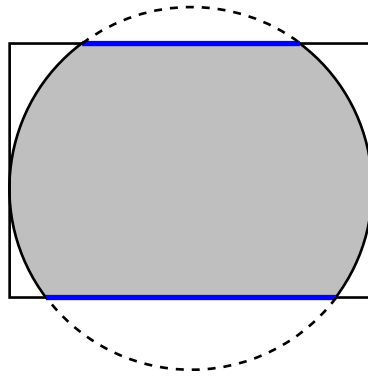
4. En la siguiente figura se muestra una mesa de billar que tiene cuatro bandas (bordes de la mesa). Se lanzó la bola de billar desde el punto  $A$  y luego de dos rebotes en los puntos  $D$  y  $E$  llegó al punto  $B$ . Como se puede observar, cada vez que la bola rebota en una banda, sale con el mismo ángulo que llegó. Si  $AB$  mide 100 cm y  $BF$  mide 110 cm, calcule la longitud del segmento  $CD$ , en cm.



5. Un proyectil es lanzado desde un punto  $A$  hasta un punto  $D$  siguiendo una trayectoria parabólica. Cuando el proyectil está directamente arriba del punto  $B$  se encuentra a una altura de 24 metros. Determine a qué altura, en metros, se encuentra el proyectil cuando está directamente arriba del punto  $C$ .



6. Un agricultor coloca un dispersor de agua en su terreno rectangular de 42 metros de ancho y 60 metros de largo. El dispersor riega un área circular que corta a los dos lados mayores del terreno y es tangente a los lados menores. De los dos bordes del terreno que son horizontales, un total de 84 metros fueron regados. Si el área del terreno regada (área sombreada en la figura) es igual a  $m + n\pi$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos, encuentre el valor de  $m + n$ .



7. Considere la siguiente secuencia de figuras hechas con palitos. La figura 1 está hecha con 7 palitos, la figura 2 está hecha con 23, etc. Como se puede observar, la base superior y los laterales van aumentando de 1 en 1. Si seguimos el patrón, ¿cuántos palitos tendrá la figura 22?



figura 1

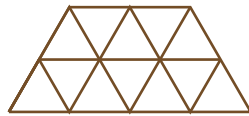


figura 2

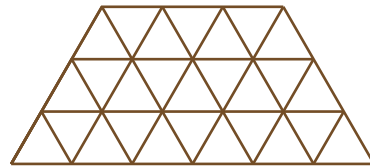
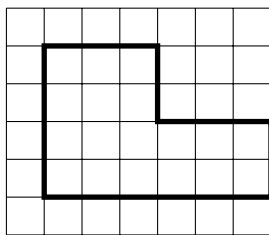


figura 3

8. En un aula de 32 estudiantes se van a formar 8 grupos de 4 para hacer una exposición, para eso se realiza un sorteo en el que se va a determinar los grupos. El sorteo se realiza de la siguiente forma: se escribe en 32 papeles los nombres de los estudiantes, se introducen a una urna y luego se van sacando los papeles uno por uno. Los 4 primeros formarán el primer grupo, los 4 siguientes el segundo grupo y así sucesivamente. Suponga que dos de los estudiantes son Andrea y Ramiro y que la probabilidad de que ellos estén en el mismo grupo es  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos coprimos. Calcule  $a + b$ .
9. Liliana eligió algunos números distintos del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 13, 14\}$  y notó que su producto es igual a la suma de los números que no eligió. Encuentre la suma de los dos menores valores que puede tomar el producto de los números que eligió Liliana.

10. Tenemos una cuadrícula de  $6 \times 7$ , como se muestra en la figura. Determine cuántos hexágonos cumplen que sus seis lados están incluidos en las líneas de esa cuadrícula. A modo de ejemplo, mostramos uno de los hexágonos que debe ser considerado.





PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

### Tercera Fase - Nivel 3

12 de octubre de 2021

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NUMERO ENTERO POSITIVO.

1. En una librería, si compras más de 75 lapiceros de cierta marca te ofrecen el 10% de descuento. Inicialmente, Laura quería comprar  $N$  lapiceros de esa marca, pero no conocía la promoción. Ahora, ella se ha dado cuenta de que puede comprar 8 lapiceros más pagando lo mismo. Determine el valor de  $N$ .
2. Carla compró un chocolate y una gaseosa en el supermercado. Al momento de cobrar, la cajera se equivocó al usar la calculadora de la caja y apretó la tecla  $\times$  en lugar de la tecla  $+$ . Cuando Carla calculó de forma mental lo que debía pagar obtuvo el mismo resultado que la cajera. Si Carla pagó 4,05 soles por su compra, calcule cuánto costó el chocolate, en céntimos, si fue el artículo que menos costó.  
*Aclaración:* un so equivale a 100 céntimos.



3. Sean  $x, y, z$  reales positivos que forman una progresión geométrica creciente, en ese orden. Si  $x - 2y + z = 4$ , calcule el menor valor posible de  $z^3/y^2$ .
4. En una urna hay  $n$  bolas marcadas con los números  $1, 2, 3, \dots, n$ . Si se extraen al azar 5 bolas (a la vez), la probabilidad de que una de las bolas tenga el número 3 es  $1/4$ . Determine el valor de  $n$ .
5. Un trapecio de bases  $BC$  y  $AD$  cumple que  $m\angle DAB = m\angle ABC = 90^\circ$ . La circunferencia de diámetro  $AB$  es tangente al lado  $CD$ . Si  $BC = 8$  y  $AD = 18$ , calcule el área del trapecio  $ABCD$ .
6. Arturo escribe un número natural de tres dígitos que es menor que 400 y tiene todos sus dígitos impares. Luego, Boris suma al número de Arturo la suma de sus dígitos y escribe el resultado. Finalmente, Cecilia escribe la suma de los dígitos del número escrito por Boris. Determine el mayor valor que puede tomar el número escrito por Cecilia.
7. Sean  $M$  y  $N$  los puntos medios de los lados  $AC$  y  $CB$  de un triángulo  $ABC$  respectivamente. Si el punto de intersección de las medianas del triángulo  $AMN$  coincide con el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ACB$ , calcule el valor de  $20 \sin^2 C$ .
8. En un restaurante hay una mesa circular que tiene 20 asientos igualmente espaciados. Debido al distanciamiento social, no está permitido que dos personas se sienten en asientos adyacentes, por lo que el restaurante debe marcar con un aspa los asientos que no pueden ser usados y con un círculo los que sí pueden ser usados. Si un grupo de 9 personas se va a sentar a esa mesa, determine de cuántas formas el restaurante puede asignar los 9 círculos y 11 aspás, para que cumplan las reglas del distanciamiento social.
9. En la pizarra están escritas las parejas:  

$$(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots, (2021, 4042)$$
Un conjunto de  $k$  elementos tiene la propiedad de que cada pareja de la pizarra contiene por lo menos un elemento de ese conjunto. Determine el menor valor posible de  $k$ .
10. Un conjunto de  $n$  números enteros positivos tiene suma igual a 2230. Se sabe que al sumar los dígitos de cada uno de esos números se obtiene el mismo resultado. Determine el mayor valor posible de  $n$ .



PERÚ

Ministerio  
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

## XVII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

### Cuarta Fase - Nivel 3

28 de octubre de 2021

1.
  - a) ¿Es posible colocar 6 números racionales positivos, distintos entre sí, alrededor de una circunferencia de tal modo que cada uno sea igual al producto de sus dos vecinos?
  - b) ¿Es posible colocar 8 números racionales positivos, distintos entre sí, alrededor de una circunferencia de tal modo que cada uno sea igual al producto de sus dos vecinos?
2. Los números del 1 al 25 van a ser distribuidos en un tablero de  $5 \times 5$  (un número en cada casilla). Primero, Ana elige  $k$  de esos números y los ubica en algunas casillas de su elección. Luego, Enrique ubica los números restantes con el objetivo de que el producto de los números de alguna fila o columna sea igual a un cuadrado perfecto.
  - a) Muestre que si  $k = 5$ , entonces Ana puede asegurar que Enrique no logre su objetivo.
  - b) Muestre que si  $k = 4$ , entonces Ana no puede evitar que Enrique logre su objetivo.
3. Sean  $M$ ,  $N$  y  $P$  puntos en los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  de un triángulo  $ABC$ , respectivamente, tales que el cuadrilátero  $MCNP$  tiene una circunferencia inscrita de radio  $r$ . Si las circunferencias inscritas de los triángulos  $BPM$  y  $ANP$  también tienen radio  $r$ , pruebe que

$$AP \cdot MP = BP \cdot NP.$$

4. Sea  $N \geq 3$  un número entero. Alrededor de una circunferencia se marcaron  $N$  puntos rojos que son los vértices de un polígono regular. Una *operación* consiste en escoger tres puntos rojos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tales que  $BA = BC$  y, luego, borrar  $B$ . Demuestre que, luego de realizar algunas operaciones, es posible conseguir que queden exactamente dos puntos rojos.



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2022)

### **Etapla UGEL - Nivel 3**

26 de agosto de 2022

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

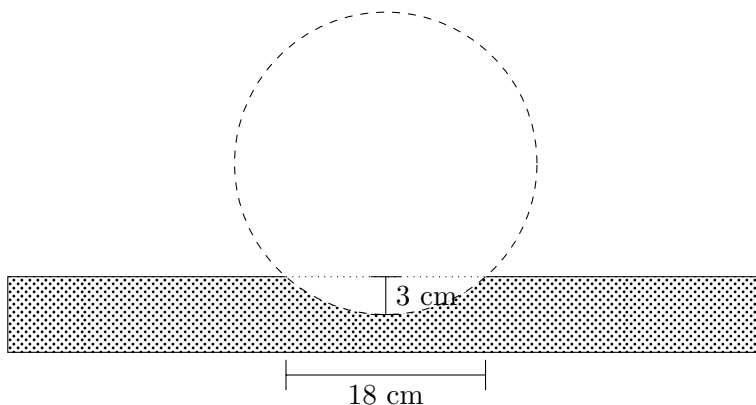
1. En el distrito de Callahuanca están las chirimoyas más grandes del mundo. En dicho distrito, una chirimoya pesa lo mismo que dos paltas y 11 manzanas. Además, una chirimoya y una palta pesan lo mismo que 17 manzanas. ¿Cuántas manzanas pesan lo mismo que una chirimoya?
2. Cierta día se produjeron 16 000 toneladas de papa en el Perú. Puno, Huánuco y la Libertad produjeron juntos el 39 % del total. Huánuco produjo 368 toneladas menos que Puno, pero 512 toneladas más que La Libertad. ¿Cuántas toneladas de papa produjo Huánuco ese día?
3. Francisco, José y Miguel tienen juntos 20 monedas cuyas denominaciones son: 1 sol, 2 soles y 5 soles. El valor total de esas 20 monedas es 60 soles. Francisco tiene 6 monedas en total de las cuales tres son de 1 sol y una es de 2 soles. José tiene en total 6 monedas con un valor total de 20 soles de las cuales 3 son de 5 soles. Francisco y Miguel tienen juntos 6 monedas de 5 soles. ¿Cuántas monedas de 1 sol tienen los tres juntos?

4. A consecuencia de un estudio físico se determinó que la frecuencia  $f$  de oscilación de un péndulo depende exclusivamente de la longitud  $\ell$  del péndulo, por medio de la fórmula

$$f = a \cdot \ell^b,$$

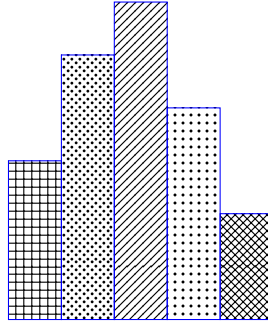
donde  $a$  y  $b$  son constantes. Se sabe que si la longitud del péndulo se multiplica por 4, la frecuencia de oscilación se reduce a la mitad. Calcule el valor de  $20 + 4b$ .

5. Sobre el cemento fresco cayó una pelota. Luego de que se secara retiraron la pelota y esta dejó un agujero circular que tiene 18 cm de diámetro y una profundidad de 3 cm en su punto más bajo. ¿Cuál es el radio de la pelota?



6. Las edades de cinco hermanas y hermanos son 21, 4, 14, 21 y  $N$ . Calcule el mayor valor posible de  $N$  si la mediana de esos cinco datos coincide con su media aritmética.
7. Andrés, después del trabajo, siempre llega a su paradero entre las 6:24:00 pm y 6:39:00 pm. Él toma alguno de los buses de las líneas A o B para ir a su casa y siempre toma el bus que está en el paradero o el que llegue primero. Un bus de la línea A llega al paradero a las 6:00:00 pm y espera exactamente 1 minuto, un bus de la línea B llega al paradero a las 6:05:00 pm y también espera exactamente 1 minuto. Los buses de ambas líneas llegan puntualmente al paradero cada 10 minutos. Si la probabilidad de que Andrés tome un bus de la línea A es  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos coprimos, determine el valor de  $a + b$ .
8. Una plaza tiene la forma de un cuadrado de 100 metros de lado y en cada esquina de la plaza hay un poste. Dentro de la plaza se va a colocar una bandera en un punto que diste 100 metros de uno de los postes y que a la vez diste 20 metros de otro poste. ¿En cuántos puntos podría estar ubicada la bandera?
9. Un viajero se encuentra perdido en el centro exacto de un desierto circular de 283 metros de radio. En el primer minuto avanza 1 m al este, en el segundo minuto avanza 2 m al norte, en el tercer minuto avanza 3 m al oeste, en el cuarto minuto avanza 4 m al sur, en el quinto minuto avanza 5 m al este y así sucesivamente, avanzando  $n$  metros en el  $n$ -ésimo minuto y girando  $90^\circ$  a la izquierda luego de cada minuto. Luego de cuántos minutos el viajero consigue salir del desierto por primera vez.

10. Carmela en su trabajo de arquitectura debe construir una maqueta de cinco edificios de la siguiente forma:



De tal modo que se cumplan las siguientes condiciones:

- Todos los edificios tienen la misma base pero diferentes alturas.
- La altura de cada edificio es un número entero entre 1 y 12, inclusive.
- Las alturas de los tres primeros edificios deben estar en orden estrictamente creciente de izquierda a derecha.
- Las alturas de los tres últimos edificios deben estar en orden estrictamente decreciente de izquierda a derecha.

Determine la cantidad de posibles maquetas que puede construir Carmela.



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2022)

### Etapa DRE - Nivel 3

29 de septiembre de 2022

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En una pollería el cuarto de pollo a la brasa cuesta 12 soles, medio pollo a la brasa cuesta 23 soles y un pollo a la brasa cuesta 45 soles. ¿Cuánto debe gastar, como mínimo, un grupo de 15 personas si cada una debe comer un cuarto de pollo?
2. Las medidas de los ángulos de un triángulo acutángulo, en grados sexagesimales, son números naturales. Además, la medida del mayor ángulo es igual a 5 veces la medida del menor ángulo. Calcule la medida del mayor ángulo.
3. En un aula hay 25 alumnos de 11, 12 y 13 años. Un día el profesor preguntó a cada alumno: “¿Cuántos alumnos del aula tienen una edad diferente a la tuya?”, al sumar todas las respuestas el profesor obtuvo 400. A continuación preguntó a cada alumno: “¿Cuántos alumnos del aula tienen una edad mayor a la tuya?”. Encuentre el valor que obtendrá el profesor al sumar todas las respuestas de la nueva pregunta.

4. Encuentre el menor número entero  $n > 80$  para el cual se cumple que el conjunto

$$\{n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n, 7n, 8n, 9n\}$$

contiene exactamente dos cuadrados perfectos.

5. Una empresa tiene 100 trabajadores divididos en 10 grupos de trabajo. Si en cada grupo se cumple que más de la mitad de sus integrantes son mujeres, ¿cuál es el menor número de mujeres que puede haber en dicha empresa?

*Aclaración:* Los grupos no necesariamente tienen la misma cantidad de personas.

6. Un trapecio  $ABCD$  cumple que su base  $AB$  mide el doble que la otra base  $CD$ . Sea  $P$  un punto en el interior del trapecio tal que  $DA = DP$  y sea  $M$  el punto medio de  $PB$ . Si  $\angle APB = (5x)^\circ$  y  $\angle PMC = (2x)^\circ$ , calcule el valor de  $x$ .

7. Decimos que un entero positivo  $n$  es *bueno* si tiene exactamente 6 dígitos y además todos ellos son impares. Determine la cantidad de enteros positivos  $n$  tales que  $n$  y  $5n$  son números buenos.

8. Los números reales positivos  $a, b, c$  cumplen que  $abc(a+b+c) = 9$ , determine el mínimo valor posible de  $(a+b)(a+c)$ .

9. Sea  $ABCD$  un rectángulo y sean  $P$  y  $Q$  puntos sobre los lados  $AB$  y  $BC$ , respectivamente, tales que  $PQ = QD$  y, además,  $\angle PQD = 120^\circ$ . Si el área del triángulo  $ADP$  es igual a 30 y el área del triángulo  $BPQ$  es igual 25, calcule el área del triángulo  $CDQ$ .

10. Sea  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{35}$  una secuencia de enteros positivos, no necesariamente distintos, tal que la suma de todos los términos es igual a 105. Si se escogen uno o más de estos términos (de cualquier forma) su suma **no** es igual a 35. Encuentre la cantidad de valores distintos que puede tomar  $a_1$ .



PERÚ

Ministerio  
de Educación



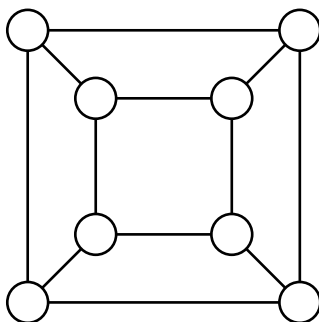
SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

## XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2022)

### Etapa Nacional - Nivel 3

27 de octubre de 2022

1. La siguiente figura está formada por 12 segmentos y 8 círculos. Como se puede ver, al inicio todos los círculos están vacíos. En cada operación se escoge un círculo vacío, se pinta de rojo y dentro se escribe el número de círculos vecinos rojos que tiene el círculo escogido (en la primera operación se pinta de rojo el círculo escogido y se escribe el número 0). Luego de 8 operaciones todos los círculos están pintados de rojo y tienen cada uno un número escrito. Demuestre que, sin importar cómo se hayan hecho las operaciones, la suma de todos los números al final es la misma.



2. Sea  $D$  el punto medio del lado  $BC$  de un triángulo  $ABC$  y sea  $G$  el punto del segmento  $AD$  tal que  $AG = 2GD$ . Sean  $E$  y  $F$  puntos de los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente, tales que  $G$  se encuentra en el segmento  $EF$ . Sean  $M$  y  $N$  puntos de los segmentos  $AE$  y  $AF$ , respectivamente, tales que  $ME = EB$  y  $NF = FC$ .
  - a) Demuestre que el área del cuadrilátero  $BMNC$  es igual a cuatro veces el área del triángulo  $DEF$ .
  - b) Demuestre que los cuadriláteros  $MNFE$  y  $AMDN$  tienen igual área.
3. Sea  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface:

$$f(xy) + y + f(x + f(y)) = (y + 1)f(x),$$

para todos los números reales  $x, y$ .

- a) Determine el valor de  $f(0)$ .
- b) Demuestre que  $f(x) = 2 - x$  para todo número real  $x$ .



4. Para cada entero positivo  $n$  se define el número  $R(n) = 11 \cdots 1$ , el cual está formado por exactamente  $n$  dígitos 1. Por ejemplo,  $R(5) = 11111$ . Sea  $n > 4$  un número entero para el cual al escribir todos los divisores positivos de  $R(n)$  se cumple que cada dígito escrito pertenece al conjunto  $\{0, 1\}$ . Demuestre que  $n$  es potencia de un número primo impar.

*Aclaración:* Una potencia de un número primo impar es un número de la forma  $p^a$ , donde  $p$  es un número primo impar y  $a$  es un entero positivo.



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XIX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2023)

### Etapa UGEL - Nivel 3

22 de setiembre de 2023

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

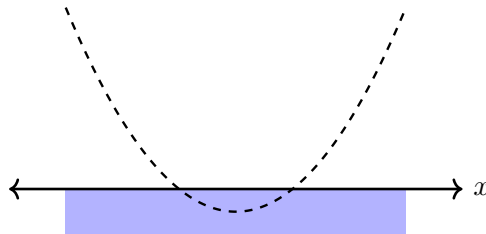
- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

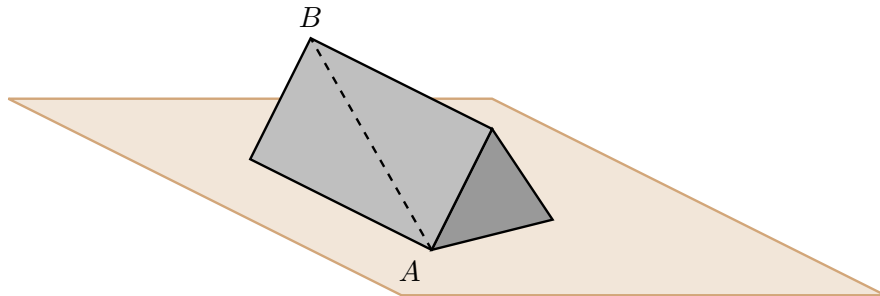
ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Para procesar los datos de  $n$  ciudades, un programa informático se demora una cantidad de segundos que es proporcional al número  $n^2$ . Si el programa se demora 72 segundos en procesar los datos de 200 ciudades, ¿cuántos segundos se demora en procesar los datos de 300 ciudades?
2. En un restaurante de comida rápida, un sándwich, un vaso de jugo y una bolsa de papitas cuestan 25 soles. Además, un sándwich, dos vasos de jugo y tres bolsas de papitas cuestan 47 soles. ¿Cuántos soles costarán un sándwich, tres vasos de jugo y cinco bolsas de papitas?
3. La *densidad* es una magnitud física que se define como el cociente entre la masa de un objeto y el volumen que ocupa. Por ejemplo, si un objeto tiene 560 kg de masa y ocupa un volumen de  $2 \text{ m}^3$ , su densidad es  $280 \text{ kg/m}^3$ .  
Un objeto inicialmente tenía una densidad de  $630 \text{ kg/m}^3$ . Por acción de la humedad el objeto incrementó su masa en 10 % e incrementó su volumen en 5 %, con lo cual su densidad ahora es  $n \text{ kg/m}^3$ . Calcule el valor de  $n$ .

4. A 80 personas se les hizo la siguiente pregunta: “¿Cuántas personas mayores de 60 años viven en tu casa” y resultó que la respuesta de cada persona pertenece al conjunto  $\{0, 1, 2\}$ . Determine cuántas personas como máximo pudieron haber respondido 0, si se sabe que la media de las respuestas fue 0,95.
5. Un ave siguió una trayectoria parabólica para atrapar a un pez que se encontraba bajo el agua. Considerando que el nivel del agua es el eje  $x$  y que la trayectoria es la gráfica de la función  $f(x) = 2x^2 - nx + 19$ , donde  $n$  es un entero positivo. Hallar el menor valor de  $n$  para el cual esta situación es posible.



6. Se tiene un prisma cuyas bases son triángulos equiláteros de  $10\sqrt{3}$  cm de lado y sus caras laterales son rectángulos de dimensiones  $10\sqrt{3}$  cm y  $10\sqrt{13}$  cm. El prisma se colocó sobre el piso apoyado sobre una de sus caras rectangulares, como se ve en la siguiente figura.



Un caracol va en línea recta desde el vértice  $A$  hasta el vértice  $B$ , a una velocidad de 4 cm por minuto. Determine a cuántos cm de altura estará el caracol luego de 4 minutos de haber empezado su recorrido.

7. Ana, Beto y Carlos entrenan para una maratón en una pista circular, cada uno corre a cierta rapidez constante. Los tres parten de un mismo punto  $P$ , pero mientras Ana y Beto corren en el mismo sentido, Carlos lo hace en sentido contrario. Carlos recorrió exactamente una vuelta y durante su recorrido se cruzó 4 veces con Ana y 9 veces con Beto en puntos distintos de  $P$ . Al finalizar su trayecto Carlos llegó en el mismo instante al punto  $P$  que Ana y Beto y los tres se detuvieron en ese momento. ¿Cuántas veces Beto sobrepasó a Ana durante todo este tiempo?
8. Claudia tiene algunas monedas de 1 sol y 5 soles (al menos una de cada tipo). Hay exactamente 30 valores distintos que se pueden obtener como la combinación de una o más de sus monedas. Si Claudia tiene  $x$  monedas de 1 sol, determine la cantidad de valores distintos que puede tomar  $x$ .

9. Sean  $D$  y  $E$  dos puntos del lado  $AC$  de un triángulo  $ABC$  de tal modo que  $A, D, E, C$  están en ese orden y  $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC = 45^\circ$ . Si  $AB + BE = 12$  y  $DB + BC = 18$ , determine el valor del producto  $AB \cdot BC$ .
10. En una recta se han marcado 20 puntos. Renato escoge 2 puntos al azar y dibuja una circunferencia cuyo diámetro tiene como extremos a los 2 puntos escogidos. Considerando los puntos que no han sido escogidos, Amanda escoge 2 puntos al azar y dibuja una circunferencia cuyo diámetro tiene como extremos a los 2 puntos escogidos. Finalmente, considerando los puntos que no han sido escogidos, Valentín hace el mismo proceso. De esta manera tenemos tres circunferencias. Sea  $p$  la probabilidad de que cualesquiera dos de esas circunferencias sean secantes. Calcule el valor de  $\frac{60}{p}$ .

*Aclaración:* dos circunferencias son secantes si se intersecan en exactamente dos puntos.



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## XIX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2023)

### Etapa DRE - Nivel 3

9 de noviembre de 2023

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

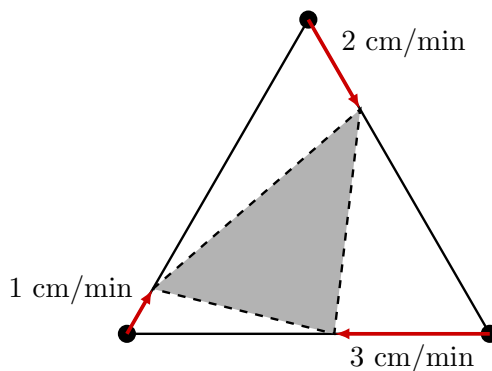
1. En un restaurante de Arequipa por cada 5 platos de adobo arequipeño se venden 4 platos de rocoto relleno y por cada 3 platos de rocoto relleno se venden 2 platos de chupe de camarones. Cierta día se vendieron, en total, 210 platos de adobo arequipeño, rocoto relleno y chupe de camarones. ¿Cuántos platos de adobo arequipeño se vendieron ese día?
2. El mapa de un pueblo indica que 1 cm en el mapa equivale a 30 m en la realidad. En el mapa se observa que el terreno de mi abuelo tiene forma de rectángulo, donde uno de los lados es 1 cm mayor que el otro. Si el terreno de mi abuelo en realidad tiene  $18000 \text{ m}^2$  de área, calcule su perímetro en metros.
3. Un cubo tiene una cara pintada de rojo, dos caras pintadas de verde y tres caras pintadas de azul. El cubo se lanza tres veces seguidas. Si  $p$  es la probabilidad de que la primera vez salga rojo, la segunda vez salga verde y la tercera vez salga azul, determine el valor de  $360p$ .

4. Juan elige tres números enteros  $a, b, c$  cuya suma es 1 y escribe los siguientes números:

$$1 - a, \quad 1 - b, \quad 1 - c, \quad ab + bc + ca, \quad abc.$$

Si al ordenar los números que escribió Juan, de menor a mayor, obtenemos  $-10, -3, 2, 3, 8$ , encuentre el valor de  $a^2 + b^2 + c^2$ .

5. Sean  $ABCD$  un rectángulo y  $M$  el punto medio del lado  $BC$ . Sea  $P$  el punto de intersección de los segmentos  $AM$  y  $BD$ . Si  $PC = CD = 4\sqrt{2}$ , determine la longitud del lado  $AD$ .
6. Determine cuántos enteros positivos  $n$ , con  $1 < n < 100$ , cumplen que la suma de todos los divisores positivos de  $n^2 + 2n$  es  $n^2 + 4n + 3$ .
7. Tres hormigas se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de 22 cm de lado. Comienzan a recorrer los lados del triángulo en las direcciones mostradas con velocidades de 1 cm/min, 2 cm/min y 3 cm/min y se detienen en el momento en que la hormiga más rápida llega a un vértice. Determine luego de cuántos minutos de iniciado el recorrido se cumple que el área del triángulo formado por las hormigas es mínima.



*Aclaración:* 1 cm/min significa 1 centímetro por minuto.

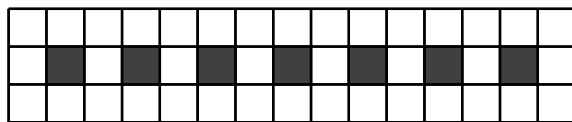
8. Luz Mery quiere escribir el número 2023 pero con más de un cero, es decir, quiere escribir un número de la forma:

$$2\underbrace{00\dots00}_{k \text{ ceros}}23,$$

donde  $k > 1$ . Determine el menor valor posible de  $k$  si el número de Luz Mery debe ser múltiplo de 2023.

9. Los cinco vértices de un pentágono  $ABCDE$  pertenecen a una circunferencia de radio  $R$ . Si  $AB = BC = 3$ ,  $CD = DE = 5$  y  $EA = 7$ , determine el valor de  $12 \cdot R^2$ .

10. Determine de cuántas maneras distintas se puede colocar 8 fichas  $L$ -triminó en el siguiente tablero de  $3 \times 15$  si ninguna ficha puede cubrir una casilla negra y, además, las fichas no se deben superponer.



$L$ -triminó



PERÚ

Ministerio  
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

## XIX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2023)

### Etapa Nacional - Nivel 3

23 de noviembre de 2023

- 
- Definimos el conjunto  $\mathcal{M} = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 99^2, 100^2\}$ .
    - ¿Cuál es el menor entero positivo que divide a exactamente dos elementos de  $\mathcal{M}$ ?
    - ¿Cuál es el mayor entero positivo que divide a exactamente dos elementos de  $\mathcal{M}$ ?
  - Para cada número real positivo  $x$ , sea  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ . Demuestre que si  $a, b, c$  son las longitudes de los lados de un triángulo, entonces  $f(a), f(b), f(c)$  son las longitudes de los lados de un triángulo.
  - Demuestre que, para todo número entero  $n \geq 2$ , es posible dividir un hexágono regular en  $n$  cuadriláteros tales que cualesquiera dos de ellos sean semejantes.

*Aclaración:* Dos cuadriláteros son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales, es decir, los cuadriláteros  $ABCD$  y  $EFGH$  son semejantes si  $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$ ,  $\angle ABC = \angle EFG$ ,  $\angle BCD = \angle FGH$ ,  $\angle CDA = \angle GHE$  y  $\angle DAB = \angle HEF$ .
  - Sean  $ABC$  un triángulo acutángulo escaleno y  $K$  un punto en su interior que pertenece a la bisectriz del ángulo  $\angle ABC$ . Sea  $P$  el punto donde la recta  $AK$  interseca a la recta perpendicular a  $AB$  que pasa por  $B$ , y sea  $Q$  el punto donde la recta  $CK$  interseca a la recta perpendicular a  $CB$  que pasa por  $B$ . Sea  $L$  el pie de la perpendicular trazada desde  $K$  a la recta  $AC$ . Pruebe que si  $PQ$  es perpendicular a  $BL$ , entonces  $K$  es el incentro de  $ABC$ .





PERÚ

Ministerio  
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

## XX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2024)

### Etapa I.E. - Nivel 3

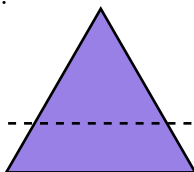
27 de junio de 2024

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. La Eurocopa es un torneo de fútbol donde participan 6 grupos de 4 países en cada grupo. La Copa Africana y la Copa Asiática tienen el mismo formato, en cambio en la Copa América participan 4 grupos de 4 países y en la Copa de las Naciones de Oceanía participan 2 grupos de 4 países. Si los cinco torneos se fusionan se realizaría una gran competencia mundial, ¿cuántos grupos de 6 equipos se podrían formar?  
A) 10                      B) 12                      C) 15                      D) 16                      E) 18
2. A un papel en forma de triángulo equilátero se le hizo un corte recto paralelo a uno de los lados, como se muestra a continuación:

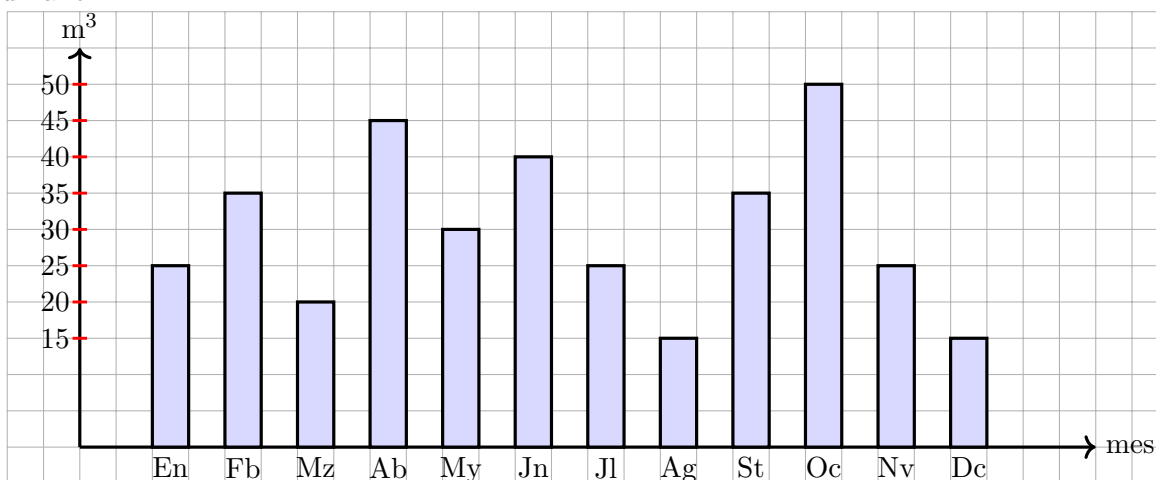


Si cada una de las dos partes resultantes tiene 36 cm de perímetro, determine el perímetro del triángulo equilátero inicial.

- A) 48 cm                      B) 44 cm                      C) 42 cm                      D) 38 cm                      E) 52 cm

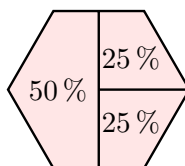
**Etapa I.E. - Nivel 3**

3. Un *número de Niven* es un entero positivo que es múltiplo de la suma de sus dígitos. ¿Cuál de los siguientes números no es un número de Niven?
- A) 999                      B) 1000                      C) 1002                      D) 1006                      E) 1008
4. El siguiente gráfico representa el consumo mensual de agua de un negocio pequeño durante un año



La media  $\bar{X}$  es igual al valor promedio de estos valores y la moda  $Mo$  es igual al valor que aparece más veces. Encuentra la relación correcta entre la media y moda de estos datos.

- A)  $\bar{X} = Mo$                       B)  $\bar{X} = Mo + 5$                       C)  $\bar{X} + Mo = 50$   
D)  $\bar{X} = Mo + 10$                       E)  $Mo = \bar{X} + 5$
5. Para una alimentación saludable, las autoridades sanitarias de un país quieren representar el tanto por ciento de carbohidratos, proteínas y grasas contenidas en un alimento, dividiendo de forma proporcional la superficie de un polígono regular mediante segmentos que parten de su centro. Por ejemplo, para el alimento *A* que tiene 50 % de carbohidratos, 25 % de proteínas y 25 % de grasas pueden usar la siguiente figura



¿Cuál de las siguientes figuras deberían usar para representar un alimento *B* que tenga 40 % de carbohidratos, 40 % de proteínas y 20 % de grasas?

- A)      B)      C)      D)      E)



### Etapa I.E. - Nivel 3

6. Cinco estudiantes postulan a una beca y fueron evaluados en cuatro áreas de conocimiento

|        | Matemática | Física | Química | Inglés |
|--------|------------|--------|---------|--------|
| Arturo | 20         | 18     | 16      | 19     |
| Bruno  | 18         | 19     | 18      | 19     |
| Carlos | 16         | 20     | 18      | 18     |
| David  | 17         | 19     | 19      | 19     |
| Elías  | 17         | 16     | 16      | 18     |

El estudiante ganador de la beca será aquel que haya obtenido una calificación superior al promedio en cada una de las cuatro áreas evaluadas. ¿Cuál de los cinco estudiantes ganará la beca?

- A) Arturo      B) Bruno      C) Carlos      D) David      E) Ninguno

7. Los números naturales del 1 al 100 son ubicados en un tablero de  $10 \times 10$  como se muestra

|    |    |    |    |   |  |
|----|----|----|----|---|--|
| ⋮  |    |    |    |   |  |
| ⋮  |    |    |    |   |  |
| ⋮  |    |    |    |   |  |
| 10 | 11 | 12 | 13 |   |  |
| 5  | 6  | 7  | 14 |   |  |
| 2  | 3  | 8  | 15 |   |  |
| 1  | 4  | 9  | 16 | ⋯ |  |

¿Cuál de los siguientes cuadrados no aparece en el tablero?

A) 

|    |    |
|----|----|
| 90 | 91 |
| 73 | 92 |

B) 

|    |    |
|----|----|
| 66 | 67 |
| 51 | 52 |

C) 

|    |    |
|----|----|
| 62 | 79 |
| 63 | 80 |

D) 

|    |    |
|----|----|
| 48 | 63 |
| 49 | 64 |

E) 

|    |    |
|----|----|
| 56 | 57 |
| 44 | 58 |

8. Un profesor tomó un examen muy difícil a sus alumnos por lo que decidió usar una función cuadrática para mejorar el promedio de las calificaciones del salón, es decir, si la calificación inicial de un estudiante es  $x$ , entonces su calificación final es  $f(x)$ , donde  $f$  es una función cuadrática. Con esta corrección, las calificaciones de algunos estudiantes cambiaron de la siguiente forma:

|        | Calificación inicial | Calificación final |
|--------|----------------------|--------------------|
| José   | 0                    | 0                  |
| Carlos | 10                   | 14                 |
| María  | 15                   |                    |
| Jazmín | 20                   | 20                 |

¿Cuál es la calificación final de María?

- A) 17      B) 17,5      C) 18      D) 18,5      E) 19



PERÚ

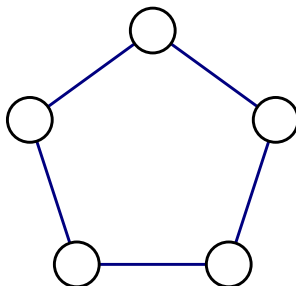
Ministerio  
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

**Etapas I.E. - Nivel 3**

9. Según normas de la FIFA el ancho de un estadio de fútbol debe variar desde los 45 hasta los 90 metros y su largo debe variar desde los 90 hasta los 120 metros. Un país quiere construir su estadio nacional de tal forma que su perímetro sea 320 metros. ¿Cuál es el área máxima, en metros cuadrados, que puede tener dicho estadio?
- A) 4500                      B) 5400                      C) 6000                      D) 6300                      E) 6400
10. En cada uno de los círculos se escribe un número entero positivo de tal manera que los cinco números son distintos. Luego, en cada lado del pentágono se escribe el producto de los números que están en sus extremos. Se sabe que cada uno de estos cinco productos es múltiplo de 10, determine el menor valor posible de la suma de estos cinco productos.



- A) 100                      B) 140                      C) 160                      D) 130                      E) 120



PERÚ

Ministerio  
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

## XX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2024)

### Etapa UGEL - Nivel 3

13 de agosto de 2024

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

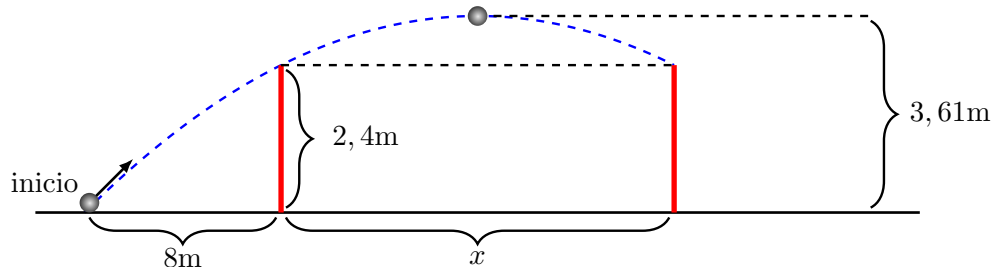
---

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

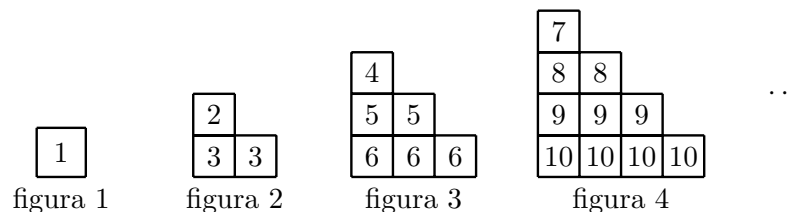
1. En la Facultad de Matemática y la Facultad de Física de una universidad, hay un total de 77 profesores titulares, 73 profesores asociados y 52 profesores asistentes. La Facultad de Matemática cuenta con 3 profesores asociados más que los profesores titulares de la Facultad de Física. Además, la Facultad de Matemática tiene 1 profesor asistente más que los profesores asociados de la Facultad de Física, y 20 profesores titulares más que los profesores asistentes de la Facultad de Física. ¿Cuántos profesores en total tiene la Facultad de Matemática?
2. Ana y Beto se encuentran separados a una distancia de 420 m y comienzan a correr para encontrarse, Ana a una rapidez constante de 2 m/s y Beto a una rapidez constante de 3 m/s. Carlos, que se encuentra en la posición de Beto, comienza a correr con rapidez constante de 4 m/s para encontrarse con Ana, una vez que se encuentra con ella, da media vuelta y corre con la misma rapidez de 4 m/s para encontrarse con Beto. Calcule la distancia que hay entre Ana y Beto cuando Carlos se encuentre con Beto.

## Etapa UGEL - Nivel 3

3. Alex se encuentra practicando tiros libres directos en un arco de 2,4 m de altura, usando una barrera de la misma altura ubicada a 8 metros del balón. El balón siguió una trayectoria parabólica, pasó rozando la barrera, alcanzó una altura máxima de 3,61 m y luego chocó en el travesaño del arco. Encuentre la distancia, en metros, entre la barrera y el arco.



4. Encuentra la suma de los números en la figura 10, suponiendo que el patrón continúa.



5. Leandro tiene 30 soles. Él lanza un dado y dependiendo del resultado ocurre lo siguiente:
- Si sale 5 o 6, gana 20 soles.
  - Si sale 3 o 4, gana 10 soles.
  - Si sale 1 o 2, pierde 10 soles.

La probabilidad de que luego de tres lances del dado Leandro duplique su dinero es  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos coprimos. Calcule el valor de  $a + b$ .

6. El conjunto de nueve números  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  cumple que su mediana es igual a la media. Determine la cantidad de subconjuntos de  $A$ , que tienen 7 elementos, y tienen la misma propiedad, es decir, su mediana es igual a la media.

*Nota:* La mediana de un conjunto de números con una cantidad impar de elementos es igual al elemento ubicado en el centro cuando son ordenados de menor a mayor.

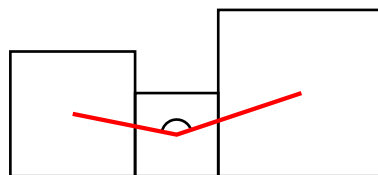
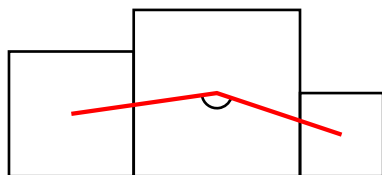
**Etapla UGEL - Nivel 3**

7. Seis estudiantes se encuentran jugando en el aula y de repente una ventana se rompió debido a una travesura. El profesor interrogó a los seis estudiantes y ellos respondieron:

- Andrea: “Todos somos inocentes.”
- Berta: “Todos somos culpables.”
- Carlos: “Exactamente uno de nosotros es inocente.”
- Damaris: “Exactamente uno de nosotros es culpable.”
- Eduardo: “Hay más de uno que es inocente.”
- Fernando: “Hay más de uno que es culpable.”

Si los estudiantes inocentes dijeron la verdad y los culpables mintieron. ¿Cuántos estudiantes son culpables?

8. Un canguro dio 4 saltos. En el primer salto avanzó 1, 2, 3 o 4 metros, en el segundo avanzó 5, 6, 7 u 8 metros, en el tercero avanzó 9, 10, 11 o 12 metros y en el cuarto avanzó 13, 14, 15 o 16 metros. ¿De cuántas formas distintas el canguro pudo recorrer una distancia total de 34 metros?
9. Una profesora elige un entero positivo de cuatro dígitos y le pide a Sebastián que escriba todos sus divisores. Sebastián escribe los 16 divisores positivos de este número y los ordena de menor a mayor. Él nota que el cuarto divisor supera en 4 al tercer divisor, el séptimo divisor supera en 1 al sexto divisor y además el sexto divisor es igual al doble del quinto divisor. Encuentra el mayor valor posible del número elegido por el profesor.
10. Tres cuadrados diferentes se ubican uno al lado del otro como se muestra en la figura de la izquierda. En la figura de la derecha, hemos intercambiado de posición el cuadrado grande, de área 16, y el cuadrado pequeño, de área 4.



Encuentra el área del cuadrado mediano, si sabemos que el ángulo formado por los centros de los cuadrados es el mismo en las dos figuras.



PERÚ

Ministerio  
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

## XX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2024)

### Etapa DRE - Nivel 3

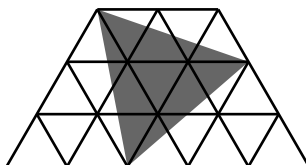
12 de setiembre de 2024

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.  
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Andrea, Bruno, César y Dalia nacieron el mismo año. Sus cumpleaños son el 9, 10, 12 y 13 de setiembre, aunque no necesariamente en ese orden. Andrea es mayor que Bruno por exactamente 4 días y César es mayor que Bruno por exactamente 1 día. ¿En qué día del mes de setiembre nació Dalia?
2. Si el área de cada triángulo equilátero pequeño es igual a  $1 u^2$ , calcule el área del triángulo sombreado.



3. Laura tiene un saco de maíz. Si se lo da a un pollo y un pato, duraría 56 días. Si se lo da a un pato y un ganso, duraría 40 días. Si se lo da a un ganso y un pavo, duraría 28 días. ¿Cuántos días duraría si se lo da a un pollo y un pavo?





### Etapa DRE - Nivel 3

4. Cecilia escribió en su cuaderno 37 números, donde cada uno de ellos es 1 o 2. Luego de borrar dos de esos números se dio cuenta que tanto la mediana como la moda aumentaron en 1. Determine la suma de los 37 números iniciales.

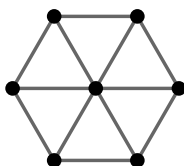
*Aclaración:* La moda es el dato que se repite más veces.

5. Una secuencia de 100 enteros positivos cumple que el producto de cualesquiera cuatro términos consecutivos es 8 y el producto de cualesquiera  $m$  términos consecutivos es divisor de 32, donde  $m$  es un entero positivo. Determine el mayor valor posible de  $m$ .

6. Sea  $n > 50$  un número entero tal que  $n - 1$  y  $n + 1$  son números primos. Encuentre el menor valor que puede tomar la cantidad de divisores positivos de  $n$ .

7. Sea  $ABCD$  un paralelogramo. Sea  $E$  un punto del lado  $AB$  y sea  $F$  un punto del lado  $BC$ . Los segmentos  $AF$  y  $FD$  intersecan al segmento  $EC$  en los puntos  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Si  $EP = PQ = QC$ , calcule el valor de  $\left(\frac{BE}{EA}\right)^2$ .

8. La siguiente figura está formada por 7 puntos unidos por segmentos de igual longitud. Una hormiga comienza su recorrido en el centro. En cada movimiento la hormiga va de un punto a otro vecino de manera aleatoria a través de un segmento.



Sea  $p$  la probabilidad de que la hormiga termine en el centro después de tres movimientos. Determine el valor de  $360p$ .

*Aclaración:* tenga en cuenta que la hormiga puede volver a recorrer un segmento por el que ya pasó previamente.

9. Veintidós amigos van a jugar fútbol. En cada partido se dividen en dos equipos de once jugadores. Encuentra la cantidad de partidos que necesitan jugar como mínimo para que sea posible la siguiente situación: cada par de amigos han jugado en diferentes equipos por lo menos una vez.
10. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales no nulos, cuya suma es 0, tales que  $a^5 + b^5 + c^5 = 5(a^3 + b^3 + c^3)$ . Encuentra el mayor valor posible de  $20(|a| + |b| + |c|)$ .

XX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2024)  
**Etapla Nacional - Nivel 3**

24 de octubre de 2024

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones
- Cada problema tiene un valor **máximo de 25 puntos**.

**Problema 1.-** Sea

$$x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{2024^{2024}}$$

Encuentre un número entero  $n$  tal que

$$n \leq 3x < n + 1$$

**Problema 2.-** Sea  $ABCDE$  un pentágono regular. Sean  $J$  y  $K$  los excentros del triángulo  $ACE$  que son opuestos a los vértices  $A$  y  $C$ , respectivamente. Los segmentos  $AC$  y  $BD$  se intersectan en  $P$ , los segmentos  $CE$  y  $BD$  se intersectan en  $Q$ ; y los segmentos  $AD$  y  $CE$  se intersectan en  $R$ .

- Demuestre que  $PJ$  es perpendicular a  $CE$ .
- Demuestre que la recta  $KR$  pasa por el circuncentro de  $CQD$ .

**Problema 3.-** Pruebe que para cada entero positivo  $n$  existen números enteros no nulos  $a$  y  $b$  tales que  $\text{mcd}(a, b) = 1$  y  $a^2 + ab + b^2 = 7^n$ .

**Problema 4.-** Considere un alfabeto formado por  $n$  letras diferentes. Queremos formar una palabra que cumpla las siguientes condiciones:

- No puede tener dos letras iguales consecutivas
- Ninguna subpalabra de longitud 4 es de la forma  $XYXY$  con  $X \neq Y$  (es decir, no pueden repetirse las mismas dos letras de forma alternada).



PERÚ

Ministerio  
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

### Etapa Nacional - Nivel 3

---

Determine, en función de  $n$ , la mayor longitud posible de una palabra que cumple estas condiciones.

*Aclaración:* Una subpalabra de una palabra  $P$  es una sucesión de letras que aparecen en  $P$ , manteniendo el mismo orden en el que aparecen en  $P$ , pero no necesariamente de manera consecutiva. Por ejemplo,  $EDDC$  es una subpalabra de  $TEADDVCB$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

Reconstruido por Math Academy Perú

# **OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICAS**

**EXÁMENES RECOPILADOS  
DESDE 2004 HASTA 2024**

# **ONEM NIVEL 3**

## **ETAPAS I.EE-UGEL-DRE- NACIONAL**





# ENTRENAMIENTO INTENSIVO

## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICAS



Clases en vivo para  
estudiantes de 1° a 5°  
de secundaria



Entrenadores especialistas  
en olimpiadas



Simulacros semanales  
nivel olimpiadas

ETAPAS • UGEL • DRE • NACIONAL



+ DE S/150,000  
EN PREMIOS



Esríbenos al +51 916841376



[www.mathAcademyperu.com](http://www.mathAcademyperu.com)