

**OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE
MATEMÁTICAS**

**EXÁMENES RECOPIRADOS
DESDE 2004 HASTA 2024**

ONEM NIVEL 2

**ETAPAS ILEE-UGEL-DRE-
NACIONAL**



ONEM

**ACEROS
AREQUIPA**

ENTRENAMIENTO INTENSIVO

*OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE
MATEMÁTICAS*



Clases en vivo para
estudiantes de 1° a 5°
de secundaria



Entrenadores especialistas
en olimpiadas



Simulacros semanales
nivel olimpiadas

ETAPAS • UGEL • DRE • NACIONAL



**+ DE S/150,000
EN PREMIOS**

➔ **Esríbenos al +51 916841376**
 **www.mathAcademyperu.com**

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Primera Fase – Nivel 2

21 de agosto de 2004

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Simplifica la siguiente expresión:

$$E = \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right) - x + 2; \quad x \neq -3$$

- A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

2. El director de un colegio salió de vacaciones a la ciudad de Arequipa. Durante sus días de vacaciones se cumplió lo siguiente:

- Llovió siete veces en la mañana o en la tarde.
- Cuando llovió en la tarde estuvo clara la mañana.
- Hubo cinco tardes claras y seis mañanas claras.

¿Cuántos días estuvo de vacaciones el director?

- A) 8 B) 9 C) 15 D) 10 E) 30

3. La siguiente tabla muestra los valores hallados para la función $f(x) = x^m - p$, donde m es un entero positivo.

| | | | | | |
|--------|----|----|----|---|-----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | -5 | -4 | -1 | 4 | a |

Halla el valor de $a - m$.

- A) 5 B) 7 C) 2 D) 9 E) 11

4. Sea la función $f(x) = 2x^2 + 2x - 10$ cuyo dominio es el conjunto $\{2; 4; 6\}$. Determina el rango de f .

- A) $\{2; 16; 24\}$ C) $\{2; 30; 74\}$
 B) $\{5; 25; 75\}$ D) $\{8; 16; 32\}$
 E) $\{3; 12; 25\}$

5. La suma de dos números es 41. Si se disminuye en 6 unidades el primero y se aumenta en 5 unidades el segundo, el producto de tales números aumenta en 10 unidades, ¿cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de los números iniciales?

- A) 9 B) 12 C) 8 D) 6 E) 11

6. En el conjunto \mathbf{R} de los números reales, E es el complemento del intervalo $<2; 9]$, halla $E \cup <6; 9]$.

A) $\langle -\infty; 2 \rangle \cup \langle 6; +\infty \rangle$ B) $\langle -\infty; 2] \cup \langle 6; +\infty \rangle$ C) $\langle -\infty, 9]$

D) $\langle 6; +\infty \rangle$ E) $\langle -\infty; 2 \rangle \cup [6; +\infty \rangle$

7. Halla el valor numérico de R:

$$R = \frac{\sqrt{23}(xy+10)}{x+y} + \frac{y+2\sqrt{29}}{x}$$

Cuando $x = \sqrt{23} + \sqrt{29}$ e $y = \sqrt{23} - \sqrt{29}$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

8. Carlos tiene 52 años. Esta edad es el doble de la edad que tenía Héctor cuando Carlos tenía la edad que tiene Héctor. ¿Qué edad tiene Héctor?

A) 49 años B) 37 años C) 38 años D) 29 años E) 39 años

9. Si $x^2 = y^2 + z^2$, simplifica la siguiente expresión:

$$\sqrt{\left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-x\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-y\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-z\right)}$$

A) $\frac{x(y+z)}{4}$ B) $\frac{x^2}{2}$ C) $y+z$ D) $\frac{x\sqrt{yz}}{2}$ E) $\frac{yz}{2}$

10. Se tienen 48 naranjas divididas en tres grupos. Del primer grupo se pasan al segundo tantas naranjas como hay en este. Luego, del segundo grupo se pasan al tercero tantas naranjas como hay en este último. Finalmente, del tercer grupo se pasan al primero tantas naranjas como hay ahora en el primero. Si cada grupo resulta con igual cantidad de naranjas, ¿cuántas naranjas tenía inicialmente el primer grupo?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 22 E) 28

11. El polinomio $x^2 - mx - 2$ es divisible por $x - 1$ y el polinomio $x^2 - nx + 2$ es divisible por $x + 1$. Entonces el valor de $m - n$ es:

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

12. Si m, n, p y k ($k > 1$) son cuatro números tales que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{21+m}{21-m} = \frac{100+n}{100-n} = k ; \quad m+n+1 = k^2$$

Calcula $k^3 + 1$.

A) 1 008 B) 1 001 C) 8 001 D) 513 E) 730

13. Observa que $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$, porque $7 + 2 = 9$ y $7 \times 2 = 14$. Usa este tipo de simplificación para hallar el valor de:

$$\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}$$

- A) $\sqrt{5} - \sqrt{6}$ B) 1 C) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ D) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ E) $\sqrt{11}$

14. Un camión que transporta cierta cantidad de bolsas de cemento de igual peso tarda 16 horas en hacer su recorrido. Si transportara igual número de bolsas pero teniendo cada bolsa 2 kilogramos más, se demoraría 17 horas. Si cada bolsa tuviera 8 kilogramos menos que las iniciales y la cantidad de bolsas se aumenta en 5, el camión tardaría 15 horas en hacer su recorrido. Calcula el número inicial de bolsas transportadas, considerando que el tiempo de recorrido es proporcional a la carga.

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 28 E) 30

15. Se llaman números *crecientes* a aquellos números naturales que tienen sus dígitos ordenados en forma creciente de izquierda a derecha. Por ejemplo, 1 478 es un número creciente pero 2 669, 7 541 y 2 548 no son crecientes. ¿Cuántos números crecientes existen entre 2 300 y 2 600?

- A) 25 B) 27 C) 31 D) 42 E) 46

16. Simplifica $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}+\sqrt[3]{26}}$.

- A) 3 B) $2\sqrt[3]{26}$ C) $\sqrt[3]{26}$ D) 1 E) $\sqrt[3]{26}+1$

17. Considera el conjunto $A = \{1; 2; 3; \dots; 2003\}$. ¿Cuántos subconjuntos tiene A tales que la suma de sus elementos sea 2 007 000?

Nota: Recuerda que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- A) Ninguno B) 3 C) 4 D) 1 002 E) 2 003

18. Sean x, y números que satisfacen:

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x}; \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

¿Cuál es el valor de $x + y$?

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 2 E) No se puede determinar

19. Un cuadrado *antimágico* es un tablero de 4×4 en el que se ubican los números del 1 al 16 de tal modo que al sumar los elementos de cada fila, de cada columna y de cada diagonal principal se obtienen 10 números consecutivos. El diagrama muestra un cuadrado *antimágico* incompleto. Halla el valor de $x + 2y$.

| | | | |
|-----|----|-----|----|
| | | y | 14 |
| x | 9 | 3 | 7 |
| | 12 | 13 | 5 |
| 10 | 11 | 6 | 4 |

A) 48 B) 47 C) 46 D) 45 E) 50

20. Un entero positivo n se dice que es *curioso* si al leerlo de izquierda a derecha se cumple que cada par de sus dígitos ubicados en forma consecutiva es un cuadrado perfecto. Por ejemplo, el número 3649 es *curioso* puesto que 36, 64 y 49 son cuadrados perfectos. ¿Cuántos enteros n mayores que 100 (incluyendo al número del ejemplo) son *curiosos*?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Segunda Fase – Nivel 2

11 de setiembre de 2004

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Utiliza los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
- *Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Rolando leyó ayer la quinta parte de las páginas de un libro; hoy leyó la mitad de lo que le quedaba por leer y todavía le faltan 80 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

2. Una delegación de 36 estudiantes viajará representando a su colegio en una competencia deportiva. Cada estudiante representa a su colegio solo en una disciplina: fútbol, básquet o tenis. Se sabe que la mitad del número de futbolistas más la tercera parte de basquetbolistas es igual a 14. Además, el número de basquetbolistas más el doble del número de tenistas es igual al número de futbolistas. ¿Cuántos tenistas conforman la delegación?

3. Calcula la suma de todos los números que satisfacen la siguiente ecuación:

$$|3x - 2| - 18 = x$$

4. Factoriza el siguiente polinomio, en el conjunto de polinomios con coeficientes enteros,

$$P(x) = x^4 + 6x^2 + 25$$

Indica como respuesta el número de factores primos.

5. Sea f una función definida en los números reales tal que:

$$f(0) = 2$$

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 4, \text{ para todo valor de } x$$

Calcula el valor de $f(1) + f(-1)$.

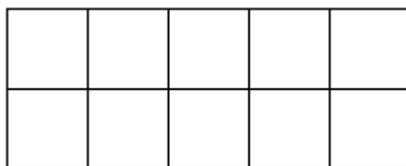
6. Por el vértice B de un triángulo ABC se traza la recta L paralela al lado AC. La bisectriz interior del ángulo A corta a L en el punto M y la bisectriz exterior del ángulo C corta a la recta L en el punto N. Si $AB = 24$ y $BC = 36$, calcula MN.

7. Santiago intercambió los dígitos de un número de tres cifras de modo que ningún dígito quedó en su posición original y obtuvo así otro número de tres cifras. Después restó el primer número menos el segundo y obtuvo como resultado un número cuadrado perfecto de dos dígitos. ¿Cuántos posibles valores tiene este número cuadrado perfecto?

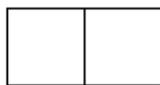
8. Encuentra la cantidad de números capicúas de 5 cifras que sean múltiplos de 37.

Nota: Un número capicúa es aquel que se lee igual de derecha a izquierda y de izquierda a derecha. Por ejemplo, 171, 2002 y 45054.

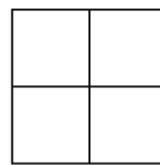
9. En un lejano país existen solamente tres tipos de monedas, cada una con un valor entero de soles. Juan tiene cuatro monedas en su bolsillo derecho por un total de 28 soles y tiene cinco monedas en su bolsillo izquierdo por un total de 21 soles, pero en cada bolsillo tiene al menos una moneda de cada tipo. Calcula la suma de los valores de los tres tipos de monedas.
10. Un tablero de 2×5 , como el mostrado en la figura, debe cubrirse completamente con fichas de colores de los tipos A, B y C mostradas. Las fichas del tipo A son azules, las del tipo B son rojas y las del tipo C son verdes.



Tipo A



Tipo B



Tipo C

Halla el número de todas las formas posibles de cubrir el tablero. Ten presente que la ficha de tipo B puede usarse tanto en forma horizontal como vertical y que no es obligatorio utilizar los tres tipos de fichas en cada cubrimiento.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Tercera Fase – Nivel 2

16 de octubre de 2004

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Ingresas tus respuestas en la computadora tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de recepción de las respuestas.*

1. Tengo cierto número de monedas, algunas en la mano derecha y otras en la izquierda. Si pasara una moneda de la mano derecha a la izquierda, tendría igual número de monedas en cada mano. Si en lugar de ello pasara una moneda de la izquierda a la derecha, tendría en la mano izquierda la mitad de monedas que en la otra. ¿Cuántas monedas tengo en total?

2. Doce árboles se encuentran alineados separados cada 5 metros. Un pozo de agua se encuentra alineado con los árboles. El árbol más cercano al pozo se encuentra a 10 metros de éste. Un jardinero se encuentra junto al pozo y dispone solo de un balde con el que lleva un balde de agua al primer árbol, luego regresa por más agua y lleva un balde de agua al segundo árbol y vuelve al pozo. Continúa de esa manera llevando un balde de agua a cada uno de los otros árboles hasta llevar agua al último árbol y volver al pozo. ¿Cuántos metros recorrió el jardinero en total?

3. Sean a y b dos números enteros positivos cuya suma es menor que 50 y tales que

$$10 \left(\sqrt[3]{\frac{9}{10}} \right) = \left(\sqrt{a+b} \right)^b$$

Halla $\sqrt[3]{ab}$.

4. Calcula la suma de todas las cifras del resultado obtenido al operar:

$$\sqrt{\underbrace{444\dots444}_{100 \text{ dígitos}} - \underbrace{888\dots888}_{50 \text{ dígitos}}}$$

5. Los polinomios $P(x) = x^4 + ax^3 - bx^2 + cx + 2$, $Q(x) = x^4 + cx^3 - bx^2 + ax + 2$ son distintos y tienen solo dos raíces en común. Encuentra el valor de b .

6. Sea f un función definida en el conjunto de los números enteros positivos tal que:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 1002$$

para todos los x e y enteros positivos. Si $f(2004) = 1002$, encuentra $f(5555)$.

7. Halla el mayor valor de x que satisface la siguiente ecuación en los números reales:

$$\sqrt{4-x\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)(x-7)}}} = \frac{5x-6-x^2}{2}$$

8. La fracción f satisface la siguiente desigualdad:

$$\frac{52}{303} < f < \frac{16}{91}$$

Halla el menor valor positivo posible del denominador de f .

9. Halla el máximo valor que puede tomar $x+y+z$, sabiendo que x, y, z son números enteros y que $x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z$.

10. En cierto país se desea emitir monedas cuyos valores sean tres cantidades enteras positivas distintas, de tal manera que una persona que lleva k monedas convenientemente elegidas, pueda pagar exactamente cualquier cantidad entera desde 1 hasta 99 (sin recibir vuelto). ¿Cuál es el menor valor que puede tener k ?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Cuarta Fase – Nivel 2

13 de noviembre de 2004

- *La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Entrega tu cuadernillo de soluciones justificando adecuadamente todos los pasos.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

JUSTIFICA ADECUADAMENTE TODOS LOS PASOS DE TU SOLUCIÓN

1. Sean a y b números enteros tales que la ecuación en x

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x$$

tiene solo una raíz entera. Encuentra los valores de a , b y las correspondientes raíces de la ecuación. Da todas las respuestas.

2. En una pizarra se escriben 20 números enteros consecutivos de dos cifras. Luego, se borran, en primer lugar, los que terminan en 7 y en segundo lugar los múltiplos de 7. Si la suma de los números que quedan es 660, ¿cuál es el menor número que se escribió en la pizarra?
3. Sean m y n números enteros tales que $m \geq n \geq 0$. Encuentra todos los pares $(m; n)$ que satisfacen:

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$$

4. En el siguiente tablero de 2 filas y 10 columnas:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | | | | | | | | | |

las casillas de la primera fila se llenan con los dígitos del 0 al 9. En cada casilla de la segunda fila se escribe un número de tal manera que, en cada columna, el número de la segunda fila sea igual a la cantidad de veces que el dígito de la primera fila aparece en todo el tablero. Diremos entonces que el *tablero se ha llenado correctamente*.

Por ejemplo, el siguiente tablero de 2 filas y 4 columnas se encuentra correctamente lleno:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 1 | 3 | 1 |

pues el 1 aparece 3 veces en el tablero, el 2 aparece 1 vez en el tablero, el 3 aparece 3 veces en el tablero y el 4 aparece 1 vez en el tablero.

Sólo existen dos formas de llenar correctamente el tablero dado de 2 filas y 10 columnas. Encuentra dichas formas.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

Primera Fase – Nivel 2

15 de julio de 2005

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Ocho camisas y un pantalón cuestan S/. 125. Además, ocho pantalones y una camisa cuestan S/. 370. ¿Cuál es el precio de un pantalón?

- A) S/. 15
- B) S/. 20
- C) S/. 30
- D) S/. 45
- E) S/. 10

2. Para conocer el peso de un bebé recién nacido se hicieron las siguientes pesadas:

- El bebé y la madre pesaron a kilogramos.
- El bebé y el padre pesaron b kilogramos.
- El padre y la madre pesaron c kilogramos.

¿Cuántos kilogramos pesa el bebé?

- A) $\frac{a+b-c}{2}$
- B) $\frac{a+b+c}{2}$
- C) $\frac{a-b+c}{2}$
- D) $\frac{b+c-a}{2}$
- E) $\frac{a+b-2c}{2}$

3. Una señora compró carne por un valor de S/. 3 y pagó con un billete de S/. 10. El carnicero, que no tenía cambio, cruzó la calzada rumbo hacia la botica, cambió el billete en dos monedas de S/. 5, cruzó nuevamente la calzada y cambió en la panadería una de las monedas de S/. 5 en 5 monedas de S/. 1, con lo cual consiguió dar el vuelto a la señora. Luego de algunos minutos el boticario devolvió al carnicero el billete de S/. 10 pues ¡oh, sorpresa! era falso. El carnicero apenado le entregó un billete de S/. 10 verdadero. ¿Cuánto perdió el carnicero?

- A) S/. 20
- B) S/. 17
- C) S/. 13
- D) S/. 10
- E) S/. 5

4. En un salón de clases hay una cierta cantidad de alumnos. Si al triple de dicha cantidad se le aumenta en 5, resulta una cantidad no menor que 93. En cambio, si al doble de la cantidad de alumnos se le disminuye 1, se obtiene una cantidad menor que 61. ¿Cuántos alumnos hay en dicho salón de clases?

- A) 30
- B) 31
- C) 32
- D) 33
- E) 35

5. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+4}}{2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4}} .$$

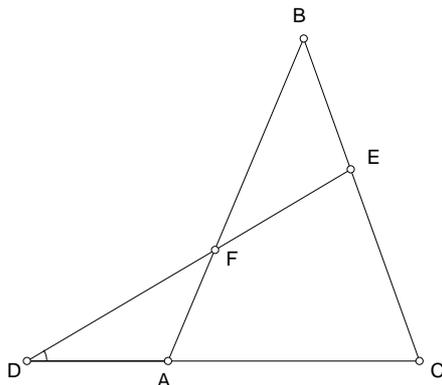
- A) 64
- B) 2^n
- C) 1
- D) 32
- E) 16

6. Simplifica la siguiente proposición:

$$\sim [\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim q] \vee p .$$

- A) $p \vee q$
- B) $p \wedge q$
- C) p
- D) $p \Rightarrow q$
- E) q

7. En la figura se tiene que $AB = BC$, $DC = DE$ y $\angle DFB = 105^\circ$. Halla la medida de $\angle FDA$.



- A) 15°
 B) 10°
 C) 20°
 D) 5°
 E) 30°
8. Utilizando al mismo tiempo dos máquinas A y B se puede terminar un trabajo en 18 horas. Se sabe que si se utiliza sólo la máquina A se demorará 27 horas más que utilizando sólo la máquina B para concluir dicho trabajo. ¿Cuántas horas se necesitará para terminar el trabajo utilizando sólo la máquina A?

- A) 54
 B) 53
 C) 45
 D) 35
 E) 50

9. Calcula el producto de raíces de la ecuación: $|2x + \sqrt{5}| = x + 4\sqrt{5}$.

- A) $3\sqrt{5}$
 B) 25
 C) -25
 D) 15
 E) -15

10. Se sabe que: $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Calcula el valor de $D = \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^4$.

- A) 62
 B) 98
 C) 142
 D) 167
 E) 1 154

11. Si $M = (x+1)^4 + (x+2)^3 + (x+3)^2 - 7(x+2) + 2$, halla el valor de:

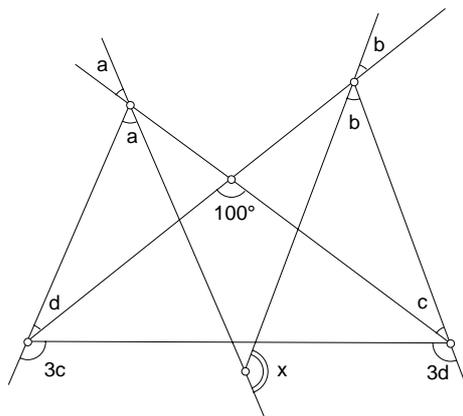
$$\frac{M}{(x+1)(x^2 + 3x + 6)}$$

- A) x
- B) $x-1$
- C) $x+2$
- D) $x-2$
- E) $x+1$

12. ¿Cuántos valores reales de x satisfacen la siguiente ecuación $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \sqrt{\frac{6}{x}}$?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

13. En la figura, calcula x .



- A) 100°
- B) 120°
- C) 135°
- D) 145°
- E) 150°

14. Sobre una recta se consideran cinco puntos consecutivos: L, I, S, E y D, que satisfacen las siguientes condiciones:

- $8 LE = 5 LD + 3 LS$
- $5 ID + 3 IS = 64$

Calcula la longitud IE del segmento cuyos extremos son los puntos I y E.

- A) 25
- B) 13
- C) 11
- D) 8
- E) 5

15. En la siguiente multiplicación de un número de tres dígitos por un número de dos dígitos, cada \square representa un dígito oculto. Calcula la suma de las cifras del producto.

$$\begin{array}{r}
 \square\square\square \times \\
 \underline{\square 3} \\
 \square 0\square \\
 \underline{\square 4\square} \\
 \square\square 1\square 5
 \end{array}$$

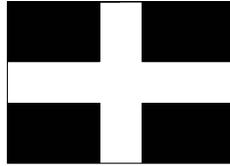
- A) 7
 B) 10
 C) 11
 D) 12
 E) 13
16. Halla los valores enteros de x e y que cumplen la ecuación:

$$2^x + 3^y = 3^{y+2} - 2^{x+1}.$$

Da como respuesta el valor de $x + y$.

- A) -1
 B) 0
 C) 1
 D) 2
 E) 4
17. Cuando el polinomio $x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx - 49$ se divide por $x - 3$ el resto es 53, y cuando se divide por $x + 2$ el resto es -87 . Calcula ab .
- A) 3
 B) 4
 C) 5
 D) 6
 E) 9
18. La sucesión infinita 1234567891011121314151617181920212223... es obtenida escribiendo los enteros positivos en orden. ¿Cuál es el 2005-ésimo dígito en esta sucesión?
- A) 4
 B) 5
 C) 6
 D) 7
 E) 8

19. Una bandera consiste de una cruz blanca sobre un fondo negro. Tanto la franja vertical como la franja horizontal son del mismo ancho. Las medidas de la bandera son 48 cm x 24 cm. Si el área de la cruz blanca es igual al área de la parte negra de la bandera, ¿cuál es el ancho de la cruz?



- A) 4 cm
B) 8 cm
C) $(36 - 12\sqrt{5})$ cm
D) $(18 - 6\sqrt{5})$ cm
E) $(9 - 3\sqrt{5})$ cm
20. Alicia y Bruno comparan la cantidad de monedas que tienen. Alicia dice “Si tú me dieras un cierto número de monedas, entonces yo tendría seis veces la cantidad de monedas que a ti te quedarían, pero si yo te diera ese mismo número de monedas, tú tendrías la tercera parte de las monedas que a mi quedarían”. ¿Cuál es la menor cantidad de monedas que Alicia puede tener?

- A) 48
B) 45
C) 36
D) 24
E) 21

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

Segunda Fase – Nivel 2

19 de agosto de 2005

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
 - *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
 - *Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
 - *Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
 - *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*
- ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS**

1. La suma de dos números es 41. Si se disminuye en 6 unidades el primero y se aumenta en 5 unidades el segundo, el producto de estos nuevos números aumenta en 10 unidades con respecto al producto de los números iniciales. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de tales números iniciales?

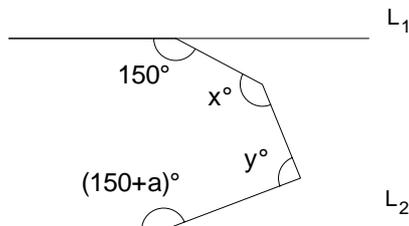
2. Sea x un número real mayor que 1 que satisface la siguiente igualdad:

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{x}}}{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}$$

Halla el valor de $\frac{1}{4}(n + 3)$.

3. Ayer recibiste una cierta cantidad de problemas y sólo pudiste resolver 70, quedándote más de la mitad sin resolver. Hoy recibiste 6 nuevos problemas y resolviste 36, quedándote sin resolver, en total, menos de 42 problemas. ¿Cuántos problemas recibiste ayer?

4. En la siguiente figura las rectas L_1 y L_2 son paralelas. Si $x^\circ + y^\circ = 230^\circ$, calcula el valor de **a**.



5. El siguiente triángulo numérico está formado por el -1 y todos los números impares positivos en forma correlativa. Calcula la suma de todos los números ubicados en la fila 20.

| | | | | | | | | | | |
|--------|--|--|---|----|---|----|--|--|----|----|
| Fila 1 | | | | | | | | | | -1 |
| Fila 2 | | | | | | | | | 1 | 3 |
| Fila 3 | | | | | 5 | | | | 7 | 9 |
| Fila 4 | | | | 11 | | 13 | | | 15 | 17 |
| ⋮ | | | ⋮ | | | | | | | ⋮ |

6. Sean x, y, z números reales positivos tales que $xyz = 1$. ¿Cuántos valores enteros puede tomar la expresión:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} ?$$

7. Juan debe escribir en la pizarra varios números enteros positivos distintos entre sí, de modo que se cumplan las siguientes condiciones:
- El máximo común divisor de dos números cualesquiera tiene que ser mayor que 1.
 - El máximo común divisor de tres números cualesquiera tiene que ser igual a 1.
 - Cada número escrito tiene que ser menor que 5005.

¿Cuántos números, como máximo, podrá escribir Juan?

8. Sea $f(n)$ el entero más cercano a \sqrt{n} . Calcula $\frac{9}{f(1)} + \frac{9}{f(2)} + \frac{9}{f(3)} + \dots + \frac{9}{f(2005)}$.

9. En un tablero cuadrulado de 123×123 casillas, cada casilla es pintada de rojo o azul de acuerdo a las siguientes condiciones:

- Cada casilla pintada de rojo que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 5 casillas azules entre sus 8 casillas vecinas.
- Cada casilla pintada de azul que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 4 casillas rojas entre sus 8 casillas vecinas.

Halla el número de casillas pintadas de rojo en el tablero.

Nota.- Dos casillas son vecinas si tienen un lado o un vértice común.

10. Sea n un número entero positivo de tres dígitos. Se multiplican sus dígitos para obtener otro número como resultado. Se multiplican los dígitos de este nuevo número para obtener un tercer número. Después de repetir este proceso cierta cantidad de veces se obtiene como resultado el número 4. Entre todos los valores que puede tomar n , ¿cuál es el segundo mayor?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

Tercera Fase – Nivel 2

30 de setiembre de 2005

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Ingresas tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y grabas tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.*
- *La respuesta de cada problema es un **número entero**.*

1. En el triángulo ABC , los puntos D y M se encuentran sobre los lados AC y BC , respectivamente. Se sabe que $AB = BD$, $\angle DBC = 48^\circ$ y $\angle ABD = \angle MAC = \angle BCA$. Halla, en grados sexagesimales, el menor ángulo que forman los segmentos AM y BD .
2. En el centro de un terreno rectangular de $60m \times 80m$ se construirá una piscina rectangular de modo que el espacio restante constituya un sendero de ancho uniforme que rodeará a la piscina. El área que ocupará la piscina es $\frac{1}{6}$ del área del terreno. ¿Cuántos metros mide el ancho del sendero?
3. ¿Cuántos números enteros positivos de tres cifras tienen algún 7 en su escritura?
4. Si x es un número real mayor que 1, simplifica

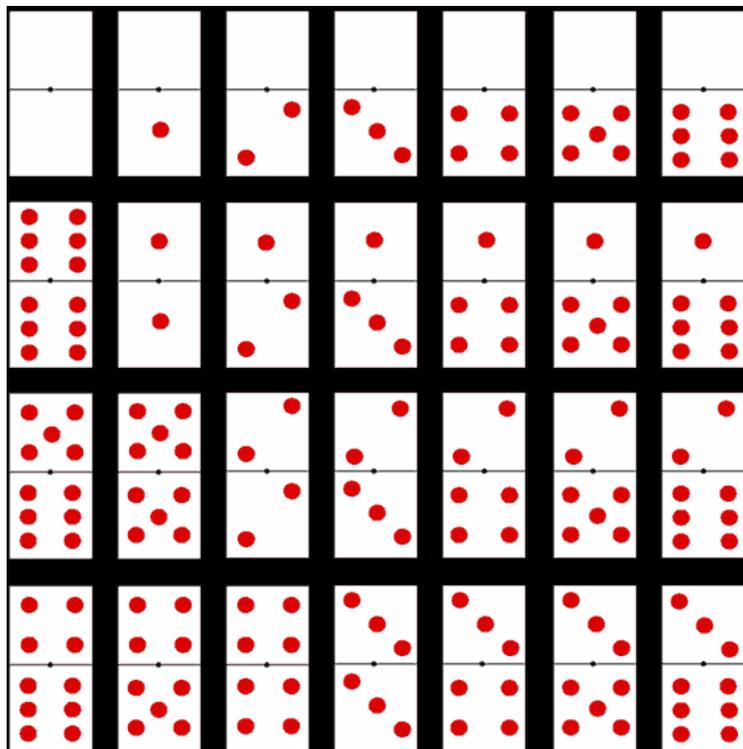
$$\sqrt[x-1]{\frac{3^{x-1} + 4^{x-1} + 6^{x-1}}{4^{1-x} + 6^{1-x} + 8^{1-x}}}$$

5. Si p y q son números enteros positivos tales que $\frac{5}{8} < \frac{p}{q} < \frac{7}{8}$ ¿cuál es el menor valor de p si se debe cumplir que $p + q = 2005$?
6. Sean x e y números enteros tales que $4x + 5y = 7$. Halla el mínimo valor de $5|x| - 3|y|$.
7. Dado el siguiente polinomio:

$$P(n) = n^3 - n^2 - 5n + 2$$

Halla la suma de los valores absolutos de los enteros n , de modo que $P^2(n)$ sea el cuadrado de un número primo.

8. Las fichas de dominó son rectángulos cada uno de los cuales está formado por dos cuadrados. Cada uno de estos cuadrados tiene un número de puntos entre 0 y 6, inclusive. El siguiente gráfico muestra las 28 fichas de dominó existentes.



Se coloca en cierto orden las 28 fichas de dominó en un rectángulo de 7x8. En el diagrama se muestra la cantidad de puntos existentes en cada posición.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 | 6 |
| 4 | 4 | 2 | 1 | 5 | 3 | 5 | 1 |
| 0 | 4 | 6 | 5 | 6 | 1 | 5 | 2 |
| 0 | 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 4 |
| 1 | 4 | 2 | 3 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| 4 | 5 | 2 | 0 | 6 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 6 | 6 | 3 | 4 | 5 | 3 | 0 |

¿Cuál es el número de fichas que se encuentran completamente incluídas en la zona sombreada del rectángulo?

9. Si $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{19}{99}$, calcula $E = 99\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)$.

10. En un tablero de ajedrez, de 8×8 casillas, un rey se encuentra en la casilla R. Cada movimiento del rey es el desplazamiento de una casilla, horizontalmente, verticalmente o en diagonal.

| | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|---|
| | | | | | | | S |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| R | | | | | | | |

¿De cuántas formas puede ir el rey de la casilla R a la casilla S en exactamente 8 movimientos?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

¡NO OLVIDES GRABAR TUS RESPUESTAS!

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

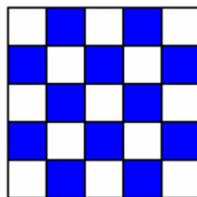
Cuarta Fase – Nivel 2

19 de noviembre de 2005

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Cada problema bien resuelto y **debidamente justificado** se calificará con 25 puntos.
- Entrega sólo tu cuadernillo de soluciones.

JUSTIFICA ADECUADAMENTE TU DESARROLLO

1. Las familias Pérez, Vásquez y Robles crían ovejas. Entre las tres familias tienen 162 ovejas. Además se sabe que los Pérez tienen el doble de ovejas que los Vásquez, mientras que los Robles tienen las tres cuartas partes de ovejas que los Pérez. Halla el número de ovejas que tiene cada familia.
2. En el tablero cuadrulado que se muestra, se coloca una ficha en cada casilla blanca.



Una jugada consiste en elegir tres casillas del tablero, que formen una “escuadra” en cualquiera de las formas que se muestran a continuación,



y añadir una ficha en cada una de estas tres casillas. Explica cómo realizar varias jugadas, para conseguir que las 25 casillas tengan la misma cantidad de fichas.

3. Encuentra todos los números naturales de cuatro cifras que coinciden con la suma de las potencias quintas de sus cifras.
4. En una lista infinita de enteros no negativos se cumple que, a partir del tercer término, cada uno de ellos es igual al valor absoluto de la diferencia entre los dos términos inmediatamente anteriores. Demuestra que en esta lista hay infinitos términos iguales a cero.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Primera Fase – Nivel 2

09 de junio de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido usar calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
- *Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
- *Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.*

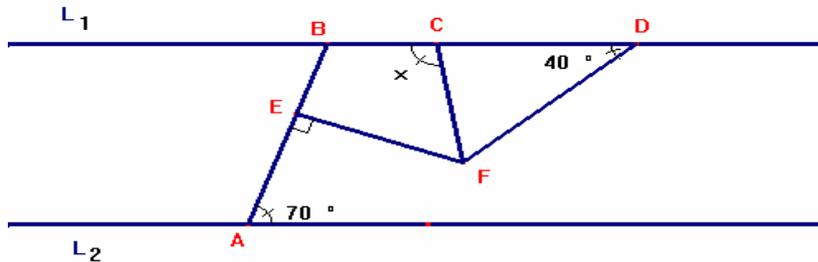
MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. ¿Cuántos números enteros n satisfacen la siguiente desigualdad?

$$\frac{3}{8} < \frac{n}{6} < \frac{9}{5}$$

- A) 10 B) 12 C) 8 D) 94 E) 7
2. ¿Cuántos números enteros mayores que 1 cumplen con la siguiente condición: la tercera parte del número más 15 es mayor que su mitad más 1?
- A) 14 B) 82 C) 28 D) 83 E) 42
3. Si $\frac{1}{2k+5} = 4$ entonces $\frac{1}{2k+7}$ es
- A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 6 D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{2}{9}$
4. Tres números enteros positivos distintos suman 84, ¿cuántos valores distintos puede tomar el segundo mayor?
- A) 40 B) 82 C) 28 D) 42 E) 84
5. ¿Cuántos números primos de dos dígitos cumplen que la suma de sus cifras es 11?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
6. En un triángulo LOT, la medida del ángulo exterior en el vértice O es 62° , las mediatrices de LO y OT cortan al lado LT en M y N respectivamente. ¿Cuál es la medida del ángulo MON?
- A) 31 B) 62 C) 124 D) 56 E) 26

7. En la figura, L_1 y L_2 son rectas paralelas, FC es bisectriz del ángulo EFD. Calcula el valor de x .



- A) 95° B) 100° C) 105° D) 110° E) 120°

8. En la siguiente tabla se muestran los valores hallados para la función $f(x) = x^m - p$,

| | | | | | |
|--------|----|----|----|---|-----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | -5 | -4 | -1 | 4 | a |

Halla $a-m$

- A) 4 B) -4 C) 1 D) 8 E) 9
9. Al escribir el número 3 a la derecha del número R que tiene dos cifras, se obtiene otro número que es igual a R aumentado en 246 unidades. El producto de las cifras de R es:
- A) 14 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24
10. Al aumentar 6 m al largo y ancho de un terreno rectangular, su área queda aumentada en 168 m^2 . Halla el perímetro del terreno.
- A) 44 m B) 22 m C) 48 m D) 52 m E) 56 m
11. La expresión $x\#y$ sólo es válida si $x=2m^n$, $y=3n^m$, donde m y n son enteros positivos con $n \neq 1$. Si se define $x\#y = \sqrt{m^2 + n^2}$, halla el máximo valor que puede tomar la expresión $128\#y$.
- A) 5 B) $2\sqrt{17}$ C) $2\sqrt{10}$ D) $\sqrt{4097}$ E) 768
12. Al sumar el cuadrado de la suma de las cifras de un número de 2 cifras con dicho número se obtiene el número original con las cifras invertidas. Calcula la suma de valores que puede tomar dicho número.
- A) 72 B) 37 C) 63 D) 36 E) 27
13. Calcula el mínimo valor de $f(x) = \sqrt{32 - 8x + x^2}$
- A) 4 B) 0 C) 2 D) $4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{17}$

14. Un padre brasileño, emocionado por el mundial, decide darle una propina a su hijo. Por el total de goles que meta cada jugador de la selección brasileña le dará en dólares el equivalente al cuadrado de esos números. Si se sabe que solo metieron goles Ronaldhino, Ronaldo y Kaká, que anotaron en total 13 goles y que su hijo recibió 57 dólares en total. ¿Cuántos goles anotó Ronaldhino, si fue el que más goles anotó?
- A) 4 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7
15. Calcula $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, si $\overline{abcd} = a \cdot (\overline{ab} - 3) \cdot (\overline{dc} - 1)$, donde cada factor mostrado de \overline{abcd} es primo y además d es par.
- A) 101 B) 40 C) 30 D) 61 E) 130
16. Se tienen k números enteros positivos no necesariamente diferentes cuya suma de sus potencias cuartas es 370. Calcula el menor valor de k .
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8
17. Jorge escribe en la pizarra los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... obteniendo cada uno de ellos como la suma de los dos anteriores, excepto el primero y el segundo. Si x e y son los números que ocupan las posiciones 2004 y 2006 respectivamente. Calcula el máximo común divisor de x e y .
- A) 2 B) 1 C) 2006 D) 2004 E) 2005
18. ¿Cuántos números de cuatro dígitos tienen la propiedad que la suma de sus dígitos es mayor que 33?
- A) 11 B) 13 C) 15 D) 18 E) 20
19. Andrea escribe un número de dos cifras, luego, Beatriz suma los cuadrados de las cifras del número escrito por Andrea y finalmente, Camila suma los cuadrados de las cifras del número escrito por Beatriz. ¿Cuál es el mayor valor que puede obtener Camila?
- A) 41 B) 130 C) 145 D) 157 E) 162
20. Sea ABCD un cuadrilátero tal que $AC = BC + CD$. Si la medida del ángulo BCD es 120° y CA es su bisectriz y además $AB = 5\text{cm}$, el valor de BD es:
- A) 2,5 B) $5\sqrt{3}$ C) 10 D) 5 E) 7,5

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Segunda Fase – Nivel 2

18 de agosto de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
- *Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

1. ¿Para cuántos valores enteros de k el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución única?

$$x^2 + y^2 = 2k^2$$

$$kx - y = 2k$$

2. Un número entero positivo es “simpático” si es múltiplo del producto de sus cifras. Por ejemplo 312 es simpático porque $312=52 (3 \times 1 \times 2)$. ¿Cuántos números simpáticos de dos cifras existen?

3. Para cada **entero positivo** n se define $f(n)$ como el cuadrado de la suma de las cifras de n . Encuentra $f(f(f(\dots f(2) \dots)))$, donde f se aplica 2006 veces.

4. ¿Cuántos números **enteros** x cumplen que $\frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 + 4x + 5}$ es un **entero**?

5. En el lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto P de manera que $AB + BP = PC$. Sea R el punto medio de AC. Si la medida del ángulo RPC es 43° , halla la medida del ángulo ABC.

6. La siguiente lista infinita 149162536... , se ha formado escribiendo los cuadrados de todos los números enteros positivos, uno a continuación del otro, en orden creciente. ¿Qué dígito ocupa la posición 1000 en esta lista?

7. Si $x^2 - x - 1$ es un factor del polinomio $ax^7 + bx^6 + 1$, donde a y b son números **enteros**, encuentra $b - a$.

8. Encuentra el **mayor entero positivo** n para el cual existe un único entero k tal que

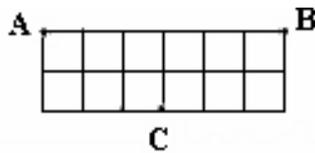
$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}.$$

9. Halla el menor valor **entero** que puede tomar la expresión

$$12\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)$$

siendo a , b y c números **reales no negativos** para los cuales tengan sentido las fracciones consideradas.

10. Se tiene el siguiente tablero de 2×6



Halla de cuántas maneras se puede ir desde el punto **A** hasta el punto **B** desplazándose por los segmentos del tablero respetando las siguientes reglas:

- No se puede pasar dos veces por un mismo punto.
- Sólo se pueden hacer tres tipos de movimientos desplazándose por los segmentos: hacia la derecha, hacia arriba, hacia abajo.
- Se tiene que pasar por el punto **C**.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Tercera Fase – Nivel 2

6 de octubre de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Ingresa tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y graba tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.*

EN TODOS LOS CASOS LA RESPUESTA CORRECTA ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

1. Rosa y Susana tienen ciertas cantidades de dinero. Si Rosa le diera a Susana la tercera parte de lo que tiene, Susana tendría S/. 90 más que Rosa, pero si Susana le diera a Rosa la tercera parte de lo que tiene, Rosa tendría S/. 50 más que Susana. ¿Qué cantidad de dinero tienen Rosa y Susana juntas?
2. Para dos números enteros positivos a y b llamamos $MCD(a, b) = d$ y $MCM(a, b) = m$
Si se cumple que:
 - $a > b$
 - a no es múltiplo de b
 - $m \cdot d = 60$
 - $m^2 - d^2 = 896$halla $a - b$
3. ¿Cuántos números capicúas de 7 dígitos son múltiplos de 4? (El número no puede comenzar con 0.)
4. ¿Para cuántos números enteros x se cumple que $x^2 + 3x + 5$ es un cuadrado perfecto?
5. Sea f la función que asigna a cada número natural n la suma de los cubos de sus dígitos. Calcula $f(f(\dots f(80)\dots))$ (Aplica 2006 veces f)
6. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, tal que $P(1) = 3$, $P(2) = 7$. Calcula el residuo de dividir $P(2006)$ entre 15.
7. (a, b, c, d, e, f) es una permutación de $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Si M es el producto de a, b y c ; y N es el producto de d, e y f , halla el menor valor que puede tomar $M + N$.
8. Halla el valor absoluto del coeficiente de x^2 en el polinomio
$$P(x) = (1 - x)(1 + 2x)(1 - 3x)(1 + 4x)\dots(1 - 9x)(1 + 10x).$$
9. ¿De cuántas maneras se puede pintar un tablero rectangular de 4 filas y 5 columnas siguiendo las siguientes reglas?
 - a) Cada casilla del tablero se debe pintar de rojo o de blanco
 - b) En cada columna la cantidad de casillas rojas debe ser igual a la cantidad de casillas blancas.
 - c) No debe haber 4 casillas del mismo color cuyos centros formen un rectángulo con lados paralelos a los del tablero.
10. ¿Cuántos polinomios $p(x)$ de **grado mayor o igual que 1** y de coeficientes enteros cumplen la condición $16p(x^2) = [p(2x)]^2$, para todo número real x ?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Cuarta Fase – Nivel 2

25 de noviembre de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Entrega tu cuadernillo de soluciones **justificando** adecuadamente todos los pasos.*
- *Puedes llevarte las hojas con los enunciados de los problemas.*

JUSTIFICA ADECUADAMENTE TODOS LOS PASOS DE TUS SOLUCIONES

1. Sea x un entero positivo tal que los números $6x + 1$, $7x + 4$ y $8x + 9$ son todos cuadrados perfectos. Prueba que x es múltiplo de 20.
2. Halla todos los polinomios no nulos $P(x)$ y $Q(x)$ tales que $P(Q(x))=P(x) \cdot Q(x)$, para todo número real x .
3. Encuentra todos los pares de enteros positivos (a, b) tales que $a^2 + a + 2b$ y $b^2 + b + 2a$ sean cuadrados perfectos.
4. En una secuencia de 900 términos, donde cada uno vale 1, 2 ó 3, se cumple que en 5 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 1, en 4 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 2 y en 3 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de **unos** que puede tener la secuencia?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática
Peruana

Primera Fase - Nivel 2

13 de julio del 2007

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Un padre le dice a su hijo: “ahora tienes treinta años menos que yo. Si salgo bien de la operación de mi corazón, podría verte hasta cuando tengas mi edad actual, y mi edad sería entonces cinco veces la edad que tienes ahora”. ¿Cuál es la edad actual del padre?
A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60
2. Un taller de confecciones de polos invierte S/.4514 en comprar remalladoras. Si cada polo producido tiene un costo de S/.11,20 por el material y la mano de obra, y se puede vender a S/.19,40, ¿cuántos polos deberá confeccionarse para obtener S/.10 000 de ganancia?
A) 515 B) 550 C) 1065 D) 1219 E) 1770
3. Un ropero tiene tres cajones, cada cajón contiene dos cajas rojas y una blanca. Cada caja roja contiene un polo rojo y dos polos blancos, cada caja blanca contiene dos polos rojos y un polo blanco. ¿Cuántos polos rojos hay en total?
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15
4. Halla el valor de $A + B + C$, sabiendo que
$$2A + B + C = 8, A + 2B + C = 6 + \sqrt{3}, A + B + 2C = 10 - \sqrt{3}$$

A) 6 B) 8 C) $4\sqrt{3}$ D) 12 E) $8\sqrt{3}$
5. Juan escribe ordenadamente 40 enteros consecutivos. La suma de los 20 primeros es 110. Calcula la suma de los otros 20 enteros consecutivos.
A) 550 B) 510 C) 440 D) 220 E) 500

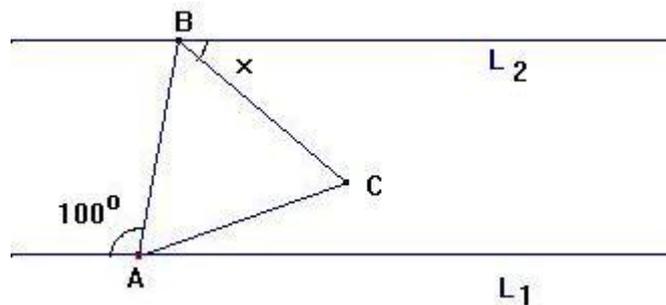


Primera Fase - Nivel 2

6. Resuelve la ecuación $2^{2x+1} = 4^x + 64$.

- A) $1/2$ B) 1 C) $3/2$ D) 2 E) 3

7. El triángulo ABC es equilátero y las rectas L_1 y L_2 son paralelas. Halla el valor de x .



- A) 30° B) 40° C) 45° D) 50° E) 60°

8. En un salón de clases, el promedio de las calificaciones de un examen de matemática fue 15,6875. Si las notas se asignan usando números enteros no negativos, ¿cuál es el número mínimo de alumnos con el cual es posible obtener este promedio?

- A) 8 B) 10 C) 16 D) 32 E) 40

9. La secuencia de números t_1, t_2, t_3, \dots está definida por

$$t_1 = 2, \quad t_{n+1} = \frac{t_n - 1}{t_n + 1},$$

para cada entero positivo n . Halla t_{2007} .

- A) -3 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 2 E) 3

10. En un triángulo ABC , se traza la bisectriz interior \overline{CD} con D en el lado AB , luego se ubica el punto E en AC tal que $m\angle CDE = 90^\circ$. Sabiendo que $m\angle B - m\angle A = 50^\circ$, calcula la medida $m\angle ADE$.

- A) 25° B) 30° C) 40° D) 45° E) 50°



Primera Fase - Nivel 2

11. Completa el siguiente tablero 7×7 con números de tal forma que la suma de los números escritos en tres casillas consecutivas (en la misma fila o en la misma columna) sea siempre 20:

| | | | | | | |
|---|--|--|---|-----|---|--|
| | | | | | 6 | |
| | | | 4 | | | |
| | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | x | | |

Halla el valor de x .

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 11
12. Si la ecuación cuadrática $x^2 - 2nx + n + 3 = 0$ tiene conjunto solución $\left\{\frac{b}{a} + 1, \frac{a}{b} + 1\right\}$, calcula n^2 .
- A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9
13. En el interior de un triángulo ABC se toma el punto E tal que $AE = BE$ y $AB = EC$. Si $\angle ABE = x = \angle ECA$; $\angle EAC = 2x$ y $\angle EBC = 5x$, calcula el valor de x .
- A) 10° B) 12° C) 15° D) 18° E) 20°
14. Una fracción $\frac{p}{q}$, con p y q enteros positivos se denomina irreducible si el máximo común divisor de p y q es 1. ¿Cuántas de las 71 fracciones $\frac{1}{72}, \frac{2}{72}, \frac{3}{72}, \dots, \frac{71}{72}$ son irreducibles?
- A) 12 B) 18 C) 20 D) 24 E) 36
15. La moneda nacional de un lejano país es el *dorado*. Las monedas de 1 dorado tienen el 45% de oro y pesan 10 gramos, las monedas de 2 dorados tienen el 55% de oro y pesan 20 gramos, y las monedas de 5 dorados tienen el 65% de oro y pesan 30 gramos. Se funden x monedas de 1 dorado, 3 de 2 dorados y 4 de 5 dorados para hacer una medalla. ¿Cuál debe ser el valor de x para que la medalla tenga el 50% de oro?
- A) 40 B) 42 C) 45 D) 48 E) 50



Primera Fase - Nivel 2

16. En una competición escolar de gimnasia rítmica, las participantes son evaluadas por siete jueces que asignan puntajes enteros del 1 al 10, inclusive. El puntaje total de cada participante se obtiene de la siguiente manera:

- Se eliminan el puntaje más alto y el puntaje más bajo, asignado por los jueces.
- Se suman los cinco puntajes restantes.

Después de la actuación de Urpi, los puntajes que asignaron cinco de los jueces fueron 7, 9, 7, 8 y 8. Si el puntaje total de Urpi fue 40, ¿cuál es el menor de los puntajes dados por los otros dos jueces?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

17. Una familia compuesta por un papá, una mamá y 6 hijos va al cine ¿De cuántas formas se pueden ubicar en una fila de 8 asientos si entre los dos padres debe haber una cantidad par de hijos?

Nota.- Ten en cuenta que el cero es número par.

- A) 11520 B) 12960 C) 17280 D) 23040 E) 40320

18. El profesor de matemática escribe doce números naturales consecutivos en la pizarra, luego un alumno borra uno de los números y calcula la suma de los once números que quedaron. Si el resultado de esa suma es 2007, ¿cuál es la suma de las cifras del número que borró?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

19. Encontrar el menor entero positivo de cuatro cifras $N = \overline{abcd}$ tal que \overline{abcd} es igual al producto de a^b por c^d . Da como respuesta la suma de las cifras de N .

- A) 18 B) 19 C) 20 D) 24 E) 27

20. Un conjunto de números enteros positivos consecutivos se denomina *monce* si la suma de las cifras de cada uno de sus elementos no es divisible por 11. Por ejemplo, el conjunto $\{98, 99, 100, 101\}$ es monce y el conjunto $\{82, 83, 84\}$ no lo es. ¿Cuál es el mayor número de elementos que puede tener un conjunto monce?

- A) 25 B) 28 C) 35 D) 38 E) 39

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática
Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

14 de septiembre del 2007

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
-

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. ¿Cuál es el menor número natural múltiplo de 5 tal que la suma de sus dígitos es 26?
2. En un triángulo isósceles de ángulos agudos, uno de sus ángulos es el doble del otro. Halla la medida del ángulo que es distinto de los otros dos.
3. Dos amigas, Cristina y Diana, se dan cuenta de algunas curiosidades cuando caminan. En cada paso Cristina avanza 70 cm , mientras que Diana avanza 50 cm en cada paso. Además, por cada cuatro pasos que da Cristina, Diana da cinco pasos. Cristina y Diana están a 106 m de distancia entre ellas y van a encontrarse avanzando en línea recta. ¿Cuántos pasos habrá dado Diana hasta encontrarse con Cristina?
4. Una función definida en los números reales tiene las siguientes propiedades:
 - i) $f(1) = 1$
 - ii) $f(2x) = 4f(x) + 6 ; \forall x \in \mathbb{R}$
 - iii) $f(x + 2) = f(x) + 12x + 12 ; \forall x \in \mathbb{R}$Calcula $f(5) + 6f(\frac{2}{3})$



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática
Peruana

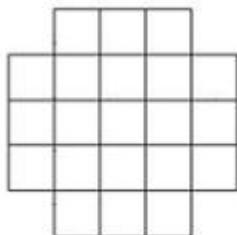
Segunda Fase - Nivel 2

14 de septiembre del 2007

5. ¿Cuántas fichas de la forma



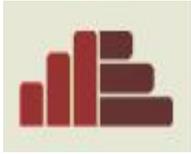
se pueden colocar como máximo en la siguiente cuadrícula



sin superposiciones y estando permitido rotar las fichas? (Los cuadraditos de las fichas y de la cuadrícula son del mismo tamaño).

6. Halla el mayor número natural N para el cual existen tres números naturales cuya suma es 120 y su producto es divisible por 3^N .
7. ¿Cuántos números naturales de 13 dígitos son múltiplos de 128 y cumplen que cada uno de sus dígitos es 2 ó 7?
8. Sea n un número natural de 8 divisores y p un número primo. Si $p^2 + n^2 = r^2$ y r es un número natural, halla $p + r$.
9. En cada casilla de un tablero de 4×4 se escribe el número 1 ó el número 2, de tal modo que haya ocho de cada uno. En el tablero, a cada cuadrado de 2×2 casillas se le asigna un número que es igual al producto de los números escritos en cada una de sus casillas. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de los nueve productos obtenidos?
10. Si a, b, c, d son las raíces de la ecuación $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$, calcula $\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6} + \frac{1}{d^6}$

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática
Peruana

Tercera fase - Nivel 2

19 de octubre del 2007

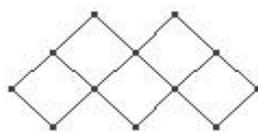
-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Ingresa tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y graba tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.
 - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
-

EN TODOS LOS CASOS LA RESPUESTA ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

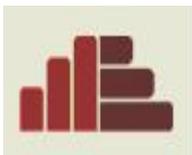
1. Sea N un número de dos cifras y múltiplo de 9. Si se invierte el orden de las cifras de N se obtiene otro número que al sumarle 4 es un múltiplo de 7. Halla N .
2. En una universidad se hizo una encuesta acerca de la aceptación de una nueva ley y los resultados fueron:
 - a) El 50 % de los encuestados está a favor.
 - b) El 40 % de los hombres encuestados está a favor.
 - c) El 30 % de las mujeres encuestadas está en contra.

¿De las personas que están en contra, qué porcentaje son mujeres?

3. En la siguiente gráfica se muestran dos figuras en forma de zig-zag hechas con cuadraditos de 1 cm de lado. La primera tiene cinco cuadraditos y su perímetro es 12 cm, la segunda tiene 9 cuadraditos y su perímetro es 20 cm. ¿Cuál es el perímetro de la figura en forma de zig-zag que tiene 37 cuadraditos?



4. Al dividir el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $x^3 - 3x + 2$ se obtiene como resto $2x^2 + 5$ y al dividir $P(x)$ entre el polinomio $x^2 + x - 2$ se obtiene como resto $mx + n$. Calcula $m + 2n$.
-



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática
Peruana

5. En un triángulo ABC , se ubica el punto D en el lado AC de tal forma que $AC = BD$ y $4\angle BAC = 3\angle BCA = 6\angle CBD$. Halla la medida del ángulo ABD .
6. Sea $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \dots, 2007\}$ el conjunto formado por los 2007 primeros números naturales. \mathcal{B} es un subconjunto de \mathcal{A} que tiene las siguientes propiedades:
- La suma de dos elementos cualesquiera de \mathcal{B} nunca es 2008.
 - La diferencia de dos elementos cualesquiera de \mathcal{B} nunca es 1.

¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puede tener \mathcal{B} ?

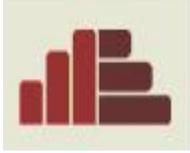
7. Se dice que un número de tres cifras es *isósceles* si sus dígitos representan los lados de un triángulo isósceles. Por ejemplo 331 es isósceles pero 229 no lo es. ¿Cuántos números isósceles de tres cifras hay?
8. Sean x, y, z números reales tales que:

$$\begin{aligned}x^2 - yz &= 6 \\y^2 - zx &= 8 \\z^2 - xy &= 10\end{aligned}$$

Halla $\frac{z-x}{y}$.

9. En la pizarra se han escrito tres números de cuatro cifras. Si en estos números se reemplazara cada dígito 2 por el dígito 3, la suma de los nuevos números sería 10985; pero si en vez de cambiar cada dígito 2 se cambia cada dígito 4 por el dígito 7, la suma de los nuevos números sería 11667. ¿Cuál es la suma de los números originales?
10. En una reunión de 20 personas, cada una tiene exactamente dos amigos en la reunión. A la medianoche cada persona debe colocarse un polo de una determinada marca, de tal manera que si dos personas tienen un amigo en común, cada una de ellas debe tener puesto un polo de la misma marca. ¿Cuál es la mayor cantidad de marcas de polos que se puede usar?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática
Peruana

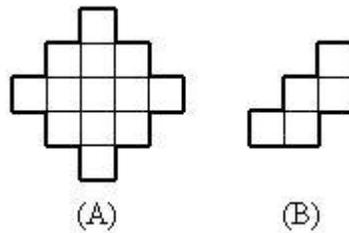
Cuarta fase - Nivel 2

02 de diciembre del 2007

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Entrega tu cuadernillo de soluciones justificando adecuadamente todos los pasos.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

Problema 1.- Encuentra todos los números primos m y n tales que $m < n$ y los números $2m + n$, $m + 2n$ y $m + n - 18$ sean también primos.

Problema 2.- Daniel dispone de fichas cuadradas de lado 1, con las cuales forma polígonos. Decimos que uno de los polígonos formados es *incaico* si todos sus lados tienen longitud 1. Por ejemplo



el polígono (A) es incaico y el polígono (B) no lo es. Demuestra que para todo entero $N \geq 11$, Daniel puede construir un polígono incaico formado con N fichas.

Problema 3.- Halla todos los números enteros r para los cuales es posible encontrar una función $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ que cumple la siguiente condición:
la sucesión

$$f(1) \times f(3); f(2) \times f(4); f(3) \times f(5); \dots; f(n) \times f(n+2); \dots$$

es una progresión aritmética de razón r .

Nota.- \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los números enteros positivos, $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Problema 4.- Enrique dibujó $2n$ rectas en el plano, donde n es un entero positivo, y se dio cuenta de que no habían tres rectas concurrentes (tres rectas con un punto común). Luego pintó de rojo cada punto de intersección y contó la cantidad de puntos rojos de cada recta. Si de estas $2n$ cantidades, la mitad de ellas valen 2007 y la otra mitad valen 2008, ¿Cuántas rectas dibujó Enrique?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

Olimpiada Nacional Escolar de Matemática 2007



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática
Peruana

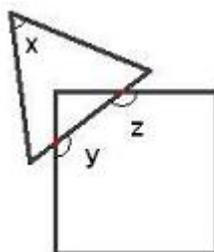
Primera Fase - Nivel 2

20 de junio del 2008

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. En la siguiente figura se muestran un cuadrado, un triángulo equilátero y los ángulos x , y , z .



Halla $x + y + z$.

- A) 240° B) 270° C) 300° D) 330° E) 360°
2. Halla el menor número capicúa mayor que 2008. Da como respuesta la suma de los cuadrados de las cifras de dicho número.
Nota.- Un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda se denomina *capicúa*, por ejemplo 14441, 2002 y 25452 son capicúas.
A) 8 B) 10 C) 16 D) 12 E) 20
3. En un salón de clase, el profesor escribe 30 números en la pizarra y le pide a Israel que calcule el promedio de los 30 números, a John el promedio de los 20 primeros y a Daniel el promedio de los 10 últimos. Si John le dictó al profesor el número 10 y Daniel, el número 40, ¿qué número dijo Israel?
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50
4. Calcula $(1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (2005^2 - 2006^2 - 2007^2 + 2008^2)$.
A) 502 B) 1004 C) 2008 D) 0 E) -2008



Primera Fase - Nivel 2

-
5. Sea A la cantidad de dígitos de $16^8 \times 5^{30}$ y B la suma de dígitos de $16^8 \times 5^{30}$. Halla $A + B$.
A) 4 B) 30 C) 31 D) 35 E) 34
6. Ana, Bertha, Carla y Diana tienen juntas 200 nuevos soles y juegan con su dinero del siguiente modo: Ana le da la mitad de lo que tiene a Bertha, luego Bertha le da la mitad de lo que tiene a Carla y en seguida Carla le da la mitad de lo que tiene a Diana, quien finalmente le da 10 nuevos soles a Ana. Si al final del juego todas tienen igual cantidad de dinero, ¿cuántos nuevos soles tenía Ana al comenzar el juego?
A) 10 B) 40 C) 50 D) 60 E) 80
7. Si $64^x + 64^{-x} = 1022$, entonces $8^x + 8^{-x}$ es igual a:
A) 16 B) 30 C) 32 D) 64 E) 128
8. Un libro de 100 páginas tiene numeradas sus páginas desde el 1 hasta el 100. ¿Cuántas de estas páginas tienen algún dígito 5 en su numeración?
A) 10 B) 15 C) 19 D) 20 E) 18
9. Dante prestó 750 nuevos soles a cada uno de sus amigos Andrés, Bruno y Cristóbal, con la condición de que cada uno le devuelva 810 nuevos soles. Actualmente la deuda de Andrés es igual al triple de la deuda de Bruno, e igual al doble de la deuda de Cristóbal. Si lo que ya pagó Andrés es a lo que ya pagó Cristóbal como 3 es a 4, ¿cuánto debe Bruno?
A) 675 B) 54 C) 108 D) 324 E) 216
10. Sea P uno de los vértices de un decágono regular, ¿cuántas diagonales de dicho decágono no pasan por P ?
A) 7 B) 14 C) 28 D) 32 E) 35
11. Se escribe en orden creciente los números enteros positivos que son múltiplos de 2 o múltiplos de 3 pero no de ambos, ¿cuál es el número que ocupa la posición 2008?
A) 4014 B) 4016 C) 6021 D) 6020 E) 4017
12. $P(x)$ es un polinomio que cumple $P(2x + 3) = 4x^2 + 2x - 1$, para todo x real. Si $P(a + 3) = 0$, calcula $\frac{a^4 + a^3}{a - 1}$.
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2
13. En un triángulo ABC , la altura y la mediana relativas a A dividen al ángulo A en tres partes iguales. Halla la diferencia entre el mayor y el menor de los ángulos del triángulo ABC .
A) 30° B) 60° C) 90° D) 120° E) 0°



Primera Fase - Nivel 2

14. Resuelve, en el conjunto de los números reales, el siguiente sistema

$$\begin{aligned}x(y + z) &= 35 \\y(x + z) &= 27 \\z(x + y) &= 32.\end{aligned}$$

Da como respuesta el valor de $|x + y + z|$.

- A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

15. En la pizarra están escritos los números

$$1, 2, 3, 4, \dots, 108, 109, 110.$$

Si se borran todos los números que son iguales al triple del producto de sus cifras, ¿cuántos números quedan?

- A) 110 B) 109 C) 108 D) 107 E) 106

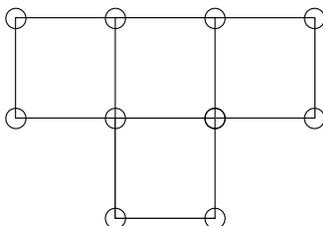
16. Sean a , b y c números reales tales que las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ son r_1 y r_2 y las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + 3c = 0$ son $\frac{r_1}{r_2}$ y $\frac{r_2}{r_1}$. Calcula $\frac{a^2}{bc}$.

- A) $-\frac{1}{3}$ B) -3 C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 1

17. ¿Cuántos números de tres cifras son iguales a 37 veces la suma de sus cifras?

- A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

18. En la figura se muestra 4 cuadraditos de 1 *cm* de lado, en los que se han marcado los 10 vértices (algunos vértices pertenecen a varios cuadraditos). Se desea pintar dichos vértices de rojo, verde o azul, de tal forma que si la distancia entre dos vértices es 2 *cm*, entonces esos vértices se pintan del mismo color. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?



Nota.- No necesariamente se usan los tres colores.

- A) 27 B) 54 C) 81 D) 9 E) 36



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática
Peruana

Primera Fase - Nivel 2

19. Las raíces de la ecuación $x^3 + ax + a = 0$ son x_1 , x_2 y x_3 . Si se cumple que

$$(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 + 4)^3 = 0,$$

halla la cantidad de valores que puede tomar a .

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Más de 3

20. Sea B un subconjunto del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$, tal que si a y b pertenecen a B , entonces $a + b$ es un número compuesto. Halla el mayor número de elementos que puede tener B .

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática
Peruana

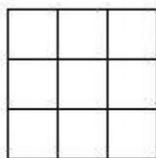
Segunda Fase - Nivel 2

19 de agosto del 2008

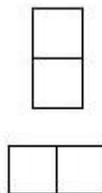
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

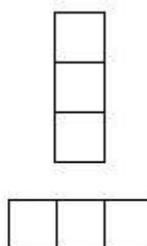
1. Tres hermanas casadas visitan a sus padres cada 2, 3 y 5 días, respectivamente. Si las tres hermanas se encontraron en su visita el primer día del año. ¿Cuántas veces en total coincidirán las tres hermanas en sus visitas a sus padres en ese año?
2. Un cuadrado 3×3 debe ser rellenado, sin superposiciones ni extremos sobrantes usando solo rectángulos de 3×1 y de 2×1 como los de las figuras. ¿De cuántas maneras se puede hacer el relleno?



cuadrado 3×3



rectángulos 2×1



rectángulos 3×1

Aclaración.- No es necesario que en todos los casos se usen los dos tipos de rectángulos.

3. Al dividir el polinomio $P(x) = ax^5 + 3x^4 + 5x + 6$ entre el polinomio $(x - 2)$ se obtiene 128 de residuo. Calcula la suma de los coeficientes del polinomio $Q(x)$ definido por $Q(x) \equiv P(x + 2)$.
4. Sean a y b números reales tales que $a^3 + b^3 = 13$ y $a^9 + b^9 = 1144$. Halla el valor de ab .



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática
Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

19 de agosto del 2008

5. ¿Cuántas parejas $(x; y)$ de números reales positivos satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^6 y^3 \end{cases}$$

6. Encuentra el menor número de 3 dígitos tal que el triple de este número tiene todos sus dígitos pares.

Aclaración.- Recuerda que el 0 es par.

7. ¿Cuál es el máximo común divisor de los siguientes 20 números?

$$21^2(21^2 - 1), \quad 22^2(22^2 - 1), \quad 23^2(23^2 - 1), \quad 24^2(24^2 - 1), \quad \dots, \quad 40^2(40^2 - 1)$$

8. Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B . Se ubican los puntos D y E sobre los lados BC y AC , respectivamente, tales que $2 \cdot ED + AD = 2 \cdot AB$, el ángulo $\angle EDA$ mide el doble que $\angle DAB$, y $\angle CED$ es recto. Halla la medida del ángulo $\angle BCA$, en grados sexagesimales.

9. Sean x, y dos números reales que satisfacen la condición $|x + y| + |x - y| = 2$. Halla el máximo valor de

$$x^2 + y^2 - 12(x + y).$$

10. Algunas casillas de un tablero de 7×7 deben pintarse de tal modo que en cada rectángulo 2×3 ó 3×2 haya al menos una casilla pintada. ¿Cuál es la mínima cantidad de casillas pintadas que puede tener el tablero?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática
Peruana

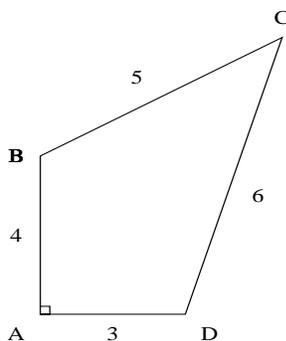
Tercera Fase - Nivel 2

2 de octubre del 2008

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
-

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Si $4^n + 4^n + 4^n + 4^n = 2^{2008}$, halla n .
2. El pasaje de Lima a Huacho normalmente cuesta 8 nuevos soles normalmente, el de Huacho a Barranca cuesta 3 nuevos soles y el de Lima a Barranca 9 nuevos soles. Cincuenta jóvenes que viven en Lima decidieron ir a Barranca, pero algunos optaron por bajar en Huacho para conocer la ciudad y después fueron a Barranca. En la ida gastaron en total 512 nuevos soles. Al regreso, los que habían bajado en Huacho decidieron ir de frente a Lima y los otros optaron por bajar en Huacho antes de ir a Lima, pero todos los pasajes se habían incrementado en 1 nuevo sol. ¿Cuánto gastaron en total en su regreso a Lima?
3. Halla el área del cuadrilátero $ABCD$.



4. Sea N un número natural tal que N^2 tiene 7 dígitos y es de la forma:

$$N^2 = \overline{x030y06x}.$$

Calcula N .

5. ¿Cuántas parejas de números enteros (x, y) satisfacen la relación $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7$?
6. En un torneo de fútbol participaron 22 equipos y al final de la primera fecha se habían jugado 11 partidos y se anotaron 9 goles en total. Si por cada partido ganado se obtiene 3 puntos, por cada partido empatado se obtiene 1 punto y por cada partido perdido se obtiene 0 puntos. ¿Cuántas de las siguientes proposiciones son necesariamente verdaderas?
- Al menos uno de los partidos quedó empatado.
 - Es posible que todos los equipos tengan el mismo puntaje.
 - Algún equipo obtuvo 3 puntos.
 - Hay al menos 4 equipos que obtuvieron 1 punto cada uno.
 - Hay al menos 4 equipos que obtuvieron 3 puntos cada uno.
7. ¿Cuántos números de 5 cifras de la forma $\overline{37abc}$ existen tales que $\overline{37abc}$, $\overline{37bca}$ y $\overline{37cab}$ sean todos múltiplos de 37?
8. Hallar $|a - b|$ al resolver el sistema

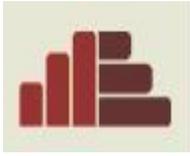
$$\begin{aligned} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} &= 183 \\ a\sqrt{b} + b\sqrt{a} &= 182 \end{aligned}$$

9. ¿Cuántas parejas (a, b) de enteros positivos cumplen las siguientes tres condiciones a la vez:
- $a > b$.
 - $a - b$ es múltiplo de 3.
 - a y b son divisores de 6^8 ?
10. Los números enteros del 1 al 25 son distribuidos en un tablero de 5×5 casillas, uno en cada casilla, de tal modo que dos números consecutivos siempre están ubicados en casillas vecinas, como por ejemplo:

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 25 |
| 12 | 1 | 2 | 17 | 24 |
| 11 | 10 | 3 | 18 | 23 |
| 8 | 9 | 4 | 19 | 22 |
| 7 | 6 | 5 | 20 | 21 |

¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de los elementos de una diagonal (de 5 casillas)?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2008)



Sociedad Matemática
Peruana

Cuarta fase - Nivel 2

02 de diciembre del 2008

-
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Entrega tu cuadernillo de soluciones justificando adecuadamente todos los pasos.
 - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

Problema 1.- Un profesor de matemáticas escribe el número 1 en la pizarra y le dice a su Alumno Gomito:

“Puedes cambiar el número escrito en la pizarra por el número que resulta al multiplicarlo por 2 o por 3 y luego sumarle 1. Puedes hacer este cambio cuantas veces quieras.

- a) ¿Es posible que Gomito obtenga el número 2008?
- b) ¿Es posible que Gomito obtenga el número 2009?

Problema 2.- Iván marca algunos puntos de una recta de tal modo que se cumple la siguiente propiedad: “Siempre que Iván escoge tres puntos marcados, hay dos de ellos cuya distancia es menor que 3 y hay dos de ellos cuya distancia es mayor que 3”. ¿Cuál es la mayor cantidad de números que puede marcar Iván?

Problema 3.- En cada casilla de un tablero de 4×4 , se escriben los números 1, 2, 3 o 4, de tal modo que no haya dos números iguales en la misma fila o columna. Decimos que un subtablero de 2×2 es bacán si contiene a todos los números del 1 al 4. ¿Cuál es el mayor número de subtableros bacanes que puede tener el tablero?

Problema 4.- Sean $\alpha < \beta < \theta$ las raíces reales de la ecuación $3x^3 - 3x + 1 = 0$. Si definimos;

$$M = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\theta} + \frac{\theta}{\alpha}, \quad N = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\theta}{\beta} + \frac{\alpha}{\theta}$$

Halla $M + N$, MN y $M - N$

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Primera Fase - Nivel 2

26 de junio de 2009

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. En un salón de clases de 50 alumnos, 24 no trajeron el libro de comunicación y 28 no trajeron el libro de matemática. Si 14 estudiantes no trajeron el libro de matemática ni el de comunicación, ¿cuántos estudiantes trajeron solamente un libro?
A) 14 B) 28 C) 24 D) 30 E) 20
2. Raúl reparte su herencia entre sus tres hijas de tal forma que a la primera le toca los $\frac{4}{15}$ del total, a la segunda los $\frac{3}{5}$ y a la tercera S/. 1800. ¿Cuál fue el total de la herencia?
A) S/. 13500 B) S/. 750 C) S/. 3000 D) S/. 9000 E) S/. 15000
3. Si m y n son números enteros tales que $m + n = 5$, entonces $2m - n$ no puede ser igual a
A) -5 B) 1 C) -2 D) 2 E) 7
4. Omar tiene cierto número de rosas y quiere regalarlas a sus amigas. Si regala 8 rosas a cada una le sobran 15, pero si quisiera regalar 11 rosas a cada una le faltarían 3. ¿Cuántas rosas tiene Omar?
A) 63 B) 61 C) 69 D) 78 E) 55
5. Dos números son tales que el triple del mayor excede a un tercio del menor en 176; y cinco veces el menor excede a tres octavos del mayor en 216. Halla la diferencia positiva de los números.
A) 36 B) 64 C) 16 D) 24 E) 48
6. Sea $P(x)$ un polinomio tal que

$$x \cdot P(x + 1) = P(x^2 + 1).$$

Si $P(3) = 2$, halla el valor de $P(5)$.

- A) 6 B) 5 C) -1 D) 0 E) 4



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)

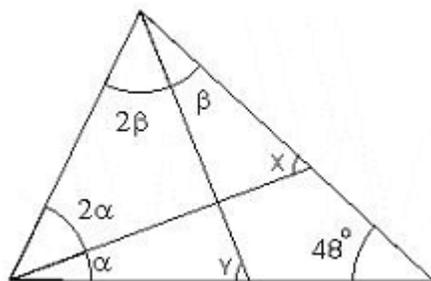


Sociedad Matemática
Peruana

Primera Fase - Nivel 2

26 de junio de 2009

7. En la siguiente figura calcula el valor de $x+y$.



- A) 140° B) 144° C) 148° D) 152° E) 156°

8. Sean $\frac{1}{a+1} = 2$, $\frac{1}{b+2} = 3$, $\frac{1}{c+3} = 6$. Halla $\frac{1}{a+b+c}$.

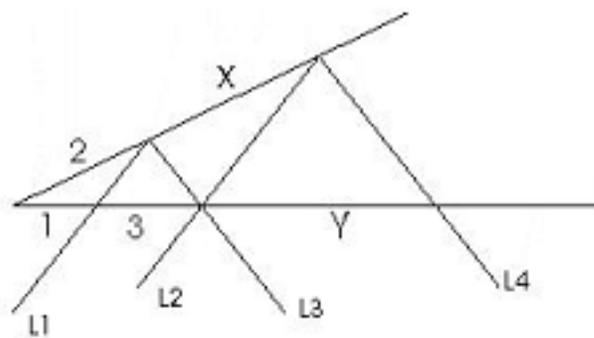
- A) $\frac{1}{10}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $-\frac{13}{6}$ E) $-\frac{2}{9}$

9. Halla el coeficiente del término de mayor grado del polinomio

$$P(x, y) = (x^2 + y)^3 - (x^2 - y)^3.$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. Los segmentos L_1 y L_2 son paralelos entre sí, y los segmentos L_3 y L_4 también son paralelos entre sí. Halla el valor de $x+y$.



- A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20



Primera Fase - Nivel 2

26 de junio de 2009

11. Si p y q son números primos tales que $p + q^2 = 102$, halla $p + q$.
- A) 82 B) 60 C) 62 D) 96 E) 94

12. Simplifica

$$\sqrt[7]{\frac{4^6 \times 6^9 \times 9^4}{9^9 \times 6^6 \times 4^4}}$$

- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

13. La suma de 42 enteros consecutivos siempre es

- A) Múltiplo de 42
B) Múltiplo de 6.
C) Múltiplo de 7, pero no de 3.
D) Múltiplo de 43
E) Múltiplo de 21, pero no de 2

14. Juan es un comerciante que viaja exactamente dos veces por semana; él puede escoger los días en los que va a viajar. Si Juan viaja un lunes ya no viaja el martes, y además, por cuestiones personales, nunca viaja un sábado. ¿De cuántas formas puede escoger sus días de viaje en una semana determinada?

- A) 4 B) 8 C) 10 D) 14 E) 18

15. Halla la suma de todos los valores reales que puede tomar x en la siguiente ecuación:

$$\frac{x^3 + x^2}{x + 1} = \frac{3^3 + 3^2}{3 + 1}$$

- A) 1 B) 3 C) -1 D) 0 E) 6

16. Se dan dos números naturales a y b de modo que ninguno de ellos es múltiplo de 10. Si el producto de a y b es una potencia de 10 y $a > b$, entonces el último dígito de $a - b$ no puede ser

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

17. La moneda de un país lejano es el peso y hay monedas de 4 pesos, 1 peso y medio peso. María lleva al banco 54 monedas que hacen un total de 200 pesos. ¿Cuánto dinero llevó María al banco en monedas de cuatro pesos?

- A) 156 B) 200 C) 188 D) 192 E) 196



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Primera Fase - Nivel 2

26 de junio de 2009

18. En el tablero mostrado se continúan colocando enteros positivos según la siguiente regla: Si en una fila están escritos los números (a, b, c) entonces en la siguiente fila se escribe los números $(b + 1, c + 1, a + 1)$. En la primera fila están escritos los números $(1, 2, 3)$ y para las otras filas se aplica la regla

| | | | |
|----------|---|---|---|
| fila 1 → | 1 | 2 | 3 |
| fila 2 → | 3 | 4 | 2 |
| fila 3 → | 5 | 3 | 4 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

¿Cuál es el número que se ubica en el centro de la fila 2009?

- A) 2009 B) 2010 C) 2011 D) 2012 E) 2013
19. En cada una de las casillas del siguiente tablero de 3×3 se escribe un número real. Se sabe que el producto de los tres números de cualquier fila o de cualquier columna es igual a 4. Además, el producto de los cuatro números de cualquier subtablero de 2×2 es igual a 8. Calcula la suma de los 9 números escritos en el tablero.

| | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |
| | | |

- A) 16 B) 18 C) 10 D) $\frac{25}{2}$ E) $\frac{25}{4}$
20. Los números reales a, b y c son tales que $a + b + c = 6$ y $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = 1$.
Halla $\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{c+a}$.
- A) 0 B) 1 C) 6 D) 36 E) $\frac{1}{6}$

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

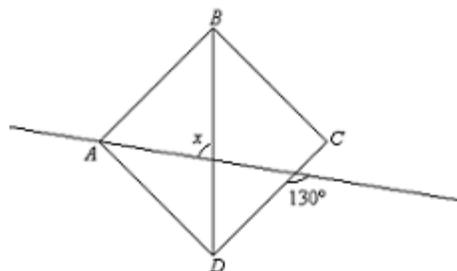
Segunda Fase - Nivel 2

27 de agosto de 2009

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. En la figura halla el valor de x si $ABCD$ es un cuadrado.



2. Sea x un elemento del conjunto $\{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ que satisface la desigualdad $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$. ¿Cuántos valores puede tomar x ?
3. Susana, Teresa y Andrea son tres atletas que cuando hacen carreras de 100 metros planos se asignan puntajes de la siguiente manera: la que queda en primer lugar obtiene tres puntos, la que queda en segundo lugar obtiene un punto, y la que queda en tercer lugar no obtiene punto alguno (no hay empates). Durante sus entrenamientos han hecho cuatro de tales carreras y al final de ellas Susana obtuvo en total cuatro puntos y Teresa tres puntos. ¿En cuántas carreras Andrea quedó en primer lugar?
4. Sea f una función para la cual se cumple que $f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 - x - \frac{7}{9}$, para todo número real x . Halla el producto de todos los valores que puede tomar a en la ecuación $f\left(\frac{a}{6}\right) = -1$.

ONEM PERÚ 2009



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

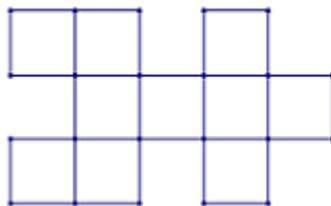
27 de agosto de 2009

-
- Un experto artesano tarda 80 minutos en hacer un sombrero. Su hijo, que le ayuda en la tarea, aún tiene mucho que aprender y tarda 2 horas en hacer un sombrero igual a los que hace su padre. Si trabajan juntos para hacer 10 sombreros, ¿cuántas horas tardarán?
 - Al dividir el polinomio $(x-1)^5$ entre $(x+1)$ se obtuvo como cociente el polinomio $P(x)$ y como residuo el número R . Si S es la suma de los coeficientes de $P(x)$, halla $S - R$.
 - Los boletos de una rifa son enumerados desde el 2000 hasta el 9999. Un profesor compró todos los boletos en los que el 5 aparece exactamente 3 veces; luego de haber comprado estos boletos regaló a su alumno todos los boletos que contenían algún dígito 0. ¿Con cuántos boletos se quedó el profesor?
 - Un número es llamado *perfectamente multiplicativo* si es igual al producto de sus divisores propios. ¿Cuántos números perfectamente multiplicativos hay entre 2 y 50?

Aclaración: Los divisores propios de n son los divisores positivos de n que son menores que n . Por ejemplo, los divisores propios de 6 son 1, 2 y 3.

- En cada casilla, de la siguiente figura, se colocan enteros positivos distintos tales que la suma de dos números de casillas vecinas es un número primo. ¿Cuál es la menor suma posible de todos los números escritos?

Aclaración: Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.



- Si suprimimos algunos dígitos del número 2001009 podemos obtener el número 201 ($2\cancel{0}01\cancel{0}\cancel{0}\cancel{9} \rightarrow 201$). También podemos obtener el número 19 ($\cancel{2}\cancel{0}\cancel{0}1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{9} \rightarrow 19$) y podemos obtener otros números más, pero hay algunos números que no se puede obtener, por ejemplo, el número 92.

Alex encontró el menor número natural tal que, al suprimir algunos de sus dígitos es posible obtener todos los números naturales menores que 2009. Si el número de Alex tiene A dígitos, y la suma de los tres dígitos que están en el extremo de la izquierda es B , calcula $A + 3B$.

ONEM PERÚ 2009



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

2 de octubre de 2009

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate, se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.

EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Sea M un número de dos dígitos que tiene la siguiente propiedad: “El máximo común divisor de M y 2009 es un número compuesto”. ¿Cuántos valores puede tomar M ?
2. En la ferretería *tornillo clavado* se vende el kilo de clavos a 15 nuevos soles y el kilo de tornillos a 20 nuevos soles. Cada clavo pesa 2,5 gramos y cada tornillo pesa 4 gramos. Don Manuel, el carpintero, gastó 120 nuevos soles en comprar tornillos y clavos y observó que el número de clavos excedía al de tornillos en 850. ¿Cuánto gastó don Manuel en la compra de los clavos?
3. Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + ax + b = 0$ son tales que una de ellas es dos unidades mayor que la otra. Si $a + b = 98$ y $a > 0$, halla el valor de $b - a$.
4. Un profesor escribe en la pizarra los números $1, 2, 3, \dots, 100$ y le pide a Gerardo que borre n números consecutivos; luego Beatriz calcula la suma de los números restantes y obtiene 3041. Halla la suma de todos los valores enteros que puede tomar n .
5. ¿Cuántos enteros positivos n cumplen exactamente dos de las siguientes propiedades?
 - $n + 16$ es un cuadrado perfecto.
 - $n + 1$ es un cuadrado perfecto.
 - n es un número primo.

ONEM PERÚ 2009



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

2 de octubre de 2009

6. En cada casilla de un tablero de 3×3 , se escribe un **número entero** de tal manera que, para cada casilla, la suma de los números escritos en sus casillas vecinas sea siempre la misma. ¿Cuántos números distintos, como máximo, se puede escribir en el tablero?

Observación. Dos casillas son vecinas si tienen un lado o un vértice en común.

7. ABC es un triángulo rectángulo en B con $AB = BC$. Sean M y N puntos de los lados AB y BC , respectivamente, tales que $BM = BN$. Las rectas perpendiculares a AN trazadas desde M y B cortan al lado AC en los puntos P y Q , respectivamente. Si $AP = 6$ y $PQ = 5$, halla QC .

8. Se llaman tetraminós en forma de T, a las figuras o fichas que tienen las siguientes formas:



Un tablero de 5×5 es cubierto con un cuadrado de 2×2 y 5 tetraminós en forma de T, quedando una casilla sin cubrir. ¿Cuántas ubicaciones diferentes puede tomar la casilla sin cubrir?

9. Un número natural de dos o más cifras es llamado *aburrido* si para dos dígitos vecinos cualesquiera se cumple que el de la derecha menos el de la izquierda es mayor o igual que 2. ¿Cuántos números aburridos existen?

Por ejemplo, 146 y 1368 son aburridos, pero 1568 no lo es.

10. A continuación se tiene 15 trinomios de segundo orden

$$x^2 - p_1x + q_1, x^2 - p_2x + q_2, \dots, x^2 - p_{15}x + q_{15}$$

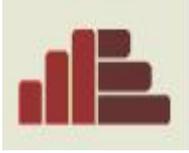
tales que el conjunto $\{p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_{15}, q_{15}\}$ es igual al conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$.

Decimos que una raíz de uno de estos trinomios es *bueno*, si esa raíz es mayor que 20.

¿Cuántas raíces buenas, como máximo, pueden tener estos 15 trinomios en total?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

ONEM PERÚ 2009



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Cuarta fase - Nivel 2

29 de noviembre del 2009

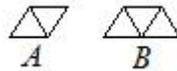
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

Problema 1. Sean a, b, c y d cuatro números enteros cuya suma es cero. Definimos

$$M = (bc - ad)(ac - bd)(ab - cd)$$

Demuestre que existe un número entero P tal que $P^2 = M$.

Problema 2. Un triángulo equilátero de lado 6 es dividido en 36 triangulitos equiláteros de lado 1. Dicho tablero es cubierto con m fichas del tipo A y n fichas del tipo B , sin superposiciones ni huecos, donde las fichas A están formadas por 2 triangulitos equiláteros de lado 1 y las fichas B por 3 triangulitos, como se muestra en la siguiente figura



Determine todos los valores de m .

Problema 3. Para cada entero positivo n tomamos el mayor divisor d de n tal que $d \leq \sqrt{n}$ y definimos $a_n = \frac{n}{d} - d$. Demuestre que en la sucesión a_1, a_2, a_3, \dots , cualquier entero k no negativo aparece infinitas veces.



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Problema 4. Se marcan N puntos sobre una circunferencia ($N \geq 5$) de modo que los N arcos formados tienen la misma longitud. Se colocan N fichas sobre los N puntos marcados (una ficha por cada punto). Dos jugadores, Ricardo y Tomás juegan retirando las fichas colocadas, de acuerdo con las siguientes reglas:

- Los turnos de juego son intercalados.
- Empieza Ricardo.
- Si en el turno de un jugador hay tres fichas tales que los correspondientes puntos marcados forman un triángulo no obtusángulo, el jugador debe retirar una de esas fichas.
- Pierde el jugador que no puede retirar ficha alguna en su turno.

¿Algún jugador tiene estrategia ganadora? En caso afirmativo, ¿en qué consiste tal estrategia?



Ministerio
de Educación

VII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2010)



Sociedad Matemática
Peruana

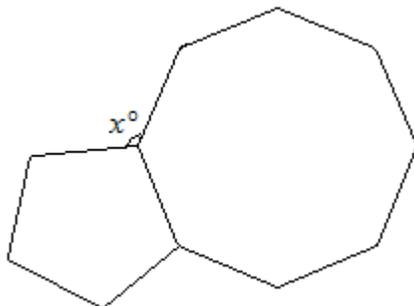
Primera Fase - Nivel 2

17 de junio de 2010

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Si a , b y c son números enteros positivos distintos tales que $a + b = 5$ y $b + c = 8$, hallar el menor valor que puede tomar $a + b + c$.
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13
2. Cuando a un barril le falta un 25 ciento para llenarse, contiene 25 litros más que cuando está lleno al 25 por ciento. ¿Cuál es la capacidad del barril?
A) 25 B) 30 C) 50 D) 75 E) 100
3. Si los polígonos mostrados son regulares, hallar x .



- A) 117 B) 108 C) 135 D) 105 E) 132
4. A un Seminario de Ciencias asistieron 320 personas, entre químicos y biólogos. La séptima parte de los químicos también son biólogos, y la décima parte de los biólogos también son químicos. ¿Cuántos asistentes son químicos y biólogos a la vez?
A) 20 B) 10 C) 32 D) 16 E) 24



5. Jesús le sumó a un cuadrado perfecto de dos dígitos el doble de la suma de sus dígitos y obtuvo un múltiplo de 25. Hallar la suma de los dígitos de dicho cuadrado perfecto.
- A) 7 B) 9 C) 10 D) 12 E) 13

6. ¿Cuál de los siguientes números es mayor?
- A) $93 \times 54 \times 16$ B) $47 \times 53 \times 32$ C) $91 \times 9 \times 96$ D) $94 \times 27 \times 32$ E) $94 \times 99 \times 8$

7. Un rectángulo tiene 30 m de perímetro, ¿en cuánto aumenta su área, si el largo y el ancho aumentan 1 m cada uno?
- A) $15 m^2$ B) $31 m^2$ C) $30 m^2$ D) $20 m^2$ E) $16 m^2$

8. Hallar la suma de las raíces de la siguiente ecuación de variable x :

$$(2k + 2)x^2 + (4 - 2k)x + (k - 2) = 0,$$

sabiendo que el producto de sus raíces es 1.

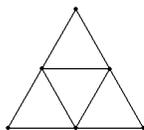
- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2
9. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinar el menor entero positivo n tal que cualquier subconjunto de X con n elementos tiene al menos dos números primos (recordar que 1 no es un número primo).
- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9
10. Sean x y y números reales tales que

$$x^2 = y + 2, \quad y^2 = x^3 - 1.$$

Calcular el valor de

$$\frac{y^2 + 2}{x + 1} + (x - y).$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
11. Usando 9 palitos de longitud 1 se puede formar un triángulo equilátero de lado 2 (como muestra la figura). ¿Cuántos palitos de longitud 1 se necesitan para formar un triángulo equilátero de lado 9?



- A) 108 B) 135 C) 144 D) 165 E) 243



12. ¿Cuántas raíces enteras tiene la ecuación

$$x^2 - 2|x| = 2?$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13. Tomás tiene un cilindro de 90 litros de capacidad máxima, el cual tiene agua pero hay menos de la mitad de la capacidad máxima. Tomás trata de llenar el cilindro usando un recipiente de 7 litros y llena el cilindro de 7 en 7 hasta que ya no se puede más. Tomás se sorprendió cuando observó que faltan x litros para que se llene el cilindro, pues x es el número de veces que usó el recipiente de 7 litros. Hallar x .

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

14. Una hormiga comienza a caminar en línea recta y se desvía 60° a la derecha después de caminar 1 m , 2 m , 3 m , 4 m y 5 m respectivamente, para finalmente recorrer 6 m . ¿Cuál es la distancia entre la posición inicial y final de la hormiga?

- A) $3\sqrt{3}$ B) 6 C) $6\sqrt{3}$ D) 12 E) 18

15. Sean a, b, c números reales tales que $a + b \neq 0, b + c \neq 0, c + a \neq 0$ y $a + b + c = 0$. Hallar

$$\frac{(a+b)^2}{(b+c)(a+c)} + \frac{(b+c)^2}{(c+a)(b+a)} + \frac{(c+a)^2}{(a+b)(c+b)}$$

- A) $3abc$ B) -1 C) 2 D) 3 E) 1

16. Una hoja de papel rectangular de $4m \times 8m$ se dobla haciendo coincidir dos de sus vértices opuestos, formándose así un pentágono. Encontrar el área de ese pentágono, en m^2 .

- A) 16 B) 32 C) 12 D) 24 E) 22

17. Un grupo de soldados marcha formando una fila de 42 m , a rapidez constante de 5 m/s . Un entrenador que se encuentra unos metros más adelante que el grupo, marcha a rapidez constante de 1 m/s , pero en dirección contraria a la del grupo. Cada vez que un soldado se encuentra con el entrenador, dicho soldado da la vuelta y sigue marchando en dirección contraria pero con la misma rapidez. Después de que todo el grupo dió la vuelta, ¿cuál será la nueva longitud de la fila?

- A) 21 B) 28 C) 30 D) 35 E) 36



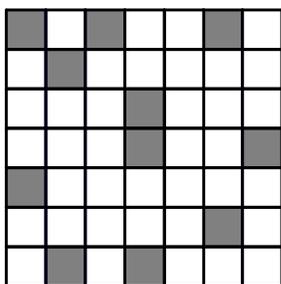
18. Sean A y B dos enteros positivos. Decimos que A es hijo de B , si $A < B$, A es un divisor de B , y además la suma de los dígitos de A es igual a la suma de los dígitos de B .

Por ejemplo, 12 es hijo de 300, pues $12 < 300$, 12 es un divisor de 300, y además $1+2 = 3+0+0$.

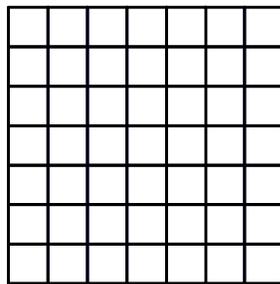
¿Cuántos hijos tiene el número 110000?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

19. En el Tablero 1 se han pintado 11 casillas de negro y notamos que se cumple la siguiente propiedad: “Cada cuadradito blanco tiene al menos un punto en común con algún cuadradito negro”. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que se deben pintar de negro en el Tablero 2 para que se cumpla la misma propiedad?



Tablero 1



Tablero 2

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

20. Sea n un entero positivo con la siguiente propiedad: el producto de los elementos de cualquier subconjunto de $S = \{1, 2, \dots, 2010\}$, con n elementos, es múltiplo de 2010. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar n ?

- A) 1980 B) 1981 C) 1982 D) 1983 E) 1984

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



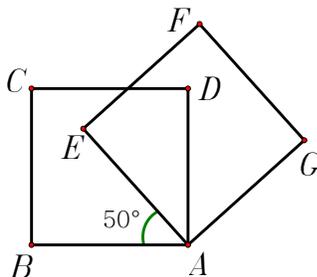
Segunda Fase - Nivel 2

20 de agosto de 2010

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Andrés, Daniel, Luis y José son postulantes a la Magistratura. Cada uno de ellos nació en una provincia distinta: Oxapampa, Callao, Lima o Trujillo. Sus edades son distintas: 52, 55, 58 y 61 años. Daniel es de Oxapampa y nació 3 años antes que Andrés, quien tiene 52 años. José no tiene 58 años y no es de Lima ni del Callao. El que tiene 58 años es de Lima. ¿Cuál es la edad del que nació en el Callao?
2. Si $a \nabla b = \frac{a^2 + b}{2}$. Calcula el mayor valor que puede tomar x en la siguiente ecuación:
$$1 \nabla 2 + 2 \nabla 3 + 3 \nabla 4 = 2 \nabla (x \nabla 2).$$
3. Sea $S(n)$ la suma de todos los dígitos de n , y $P(n)$ el producto de todos los dígitos de n . Por ejemplo, $S(124) = 7$ y $P(35) = 15$. Encuentra todos los números n de dos dígitos, tales que $P(n) + S(n) = n$. Escribe como respuesta la suma de todos esos números n .
4. En la siguiente figura se muestran los cuadrados $ABCD$ y $AEFG$ tales que $AB = AG$. Si $\angle EAB = 50^\circ$, calcula la medida de $\angle FCD + \angle DGA$ (en grados sexagesimales).





5. Sea $N = 9 + 99 + 999 + 9999 + \dots + \underbrace{999\dots99}_{2009 \text{ veces}}$. ¿Cuántas veces aparecerá el dígito 1 en el número N ?

6. Determina el menor entero positivo M que cumple las siguientes condiciones a la vez:

- $M > 2010$.
- Todos los dígitos de M son mayores que cero y diferentes entre sí.
- M es múltiplo de 12.

7. En cada una de las caras (anverso y reverso) de dos tarjetas de cartón se ha escrito un número, de tal forma que los cuatro números son distintos. Zoila lanzó las tarjetas al aire y cuando cayeron a la mesa, notó que la suma de los números que quedaron visibles fue 36, luego, sus amigas Lucía, Camila y María repitieron el mismo proceso pero obtuvieron los resultados: 41, 50 y 55, respectivamente. Si los números que vio María fueron:

$$\boxed{25} \quad \boxed{30}$$

Calcula la diferencia de los números que vio Lucía.

8. Tengo diez tarjetas, en cada una está escrito uno de los siguientes números (sin repetir):

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \quad 28 \quad 36 \quad 45 \quad 55.$$

Si las diez tarjetas se introducen en una bolsa negra, ¿cuál es el mínimo número de tarjetas que debo sacar, sin ver, para tener la seguridad de que entre las tarjetas que saqué hay dos cuya suma sea un cuadrado perfecto?

9. Consideremos todos los polinomios $P(x)$ de grado 2 con coeficientes en el conjunto $\{-2, -1, 1, 2\}$. ¿Cuántos de estos polinomios satisfacen la desigualdad:

$$P(x + y) \geq P(x) + P(y),$$

para todos los números reales positivos x, y ?

10. Sean a y b números reales positivos tales que : $a^3 - 3ab^2 = 36\sqrt{2}$ y $b^3 - 3ba^2 = -52\sqrt{2}$. Halla el valor de $a^2 + b^2$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

VII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2010)



Sociedad Matemática
Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

7 de octubre de 2010

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. El siguiente arreglo está formado por 20 filas. ¿Cuántas veces se puede leer la palabra ONEM en dicho arreglo, ya sea de manera vertical u horizontal?

```

                O
              O N
            O N E
          O N E M
        O N E M O
      O N E M O N
    O N E M O N E
  O N E M O N E M
  . . .           . . .
  
```

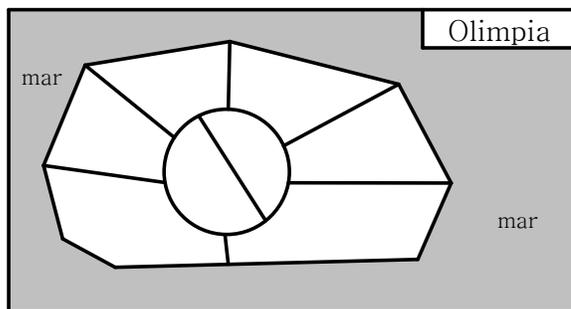
2. Si los números de dos dígitos \overline{ab} y \overline{ba} son raíces de la ecuación $x^2 - 66x + k = 0$, ¿cuál es la suma de todos los valores que puede tomar k ?

3. Simplifica:

$$\sqrt{2^{2010} + 2^{1006} + 1} - \sqrt{2^{2010} - 2^{1006} + 1}.$$

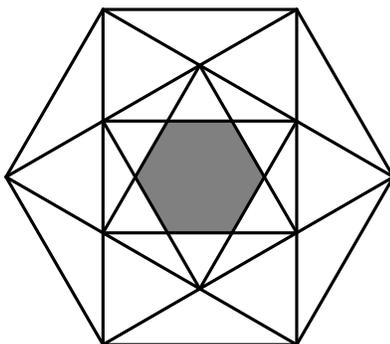


4. En la siguiente figura se muestra el mapa de la isla Olimpia, en el que se muestra las 8 regiones en las que está dividida:



Cada región debe pintarse de un color, de tal forma que, si dos regiones son vecinas (es decir, si tienen frontera en común) entonces deben pintarse de colores diferentes, ¿cuántos colores como mínimo se necesita?

5. En la siguiente figura, el hexágono más grande es regular y tiene área 810:



Calcula el área del hexágono pequeño sombreado.

6. Una profesora le pide a sus alumnos que calculen el resto de dividir el número $N = 987654321$ entre 11. Sin embargo, cuando José escribe el número N en su cuaderno, no escribió uno de los dígitos de N . Si la respuesta de José sólo se diferenció en 1 de la respuesta que dió la profesora, ¿cuántos valores puede tomar el dígito que José dejó de escribir?

Aclaración. Se asume que los cálculos de la profesora y de José son correctos.



7. En la siguiente división exacta, cada * representa un dígito mayor que 0 y menor que 8:

$$\begin{array}{r}
 * 0 * 0 \quad \bigg| * 5 \\
 * * \\
 \hline
 * * \\
 * * \\
 \hline
 * 0 \\
 * 0 \\
 \hline
 - -
 \end{array}$$

Encuentra el valor del cociente, sabiendo que está formado por 3 dígitos distintos.

8. En una pizarra están escritos los números desde el 1 hasta el 999999 de manera consecutiva, como se muestra:

$$123456789101112 \dots 999998999999.$$

¿Cuántas veces aparece el bloque 2010 en esta lista escrita en la pizarra?

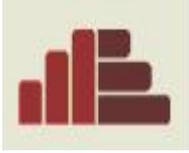
9. Halla la cantidad de parejas (m, n) de números enteros que cumplen las siguientes dos condiciones a la vez:

- m es raíz de la ecuación $x^3 + mx - 2n = 0$.
- n es raíz de la ecuación $x^3 - nx - 2m = 0$.

10. Para cada conjunto no vacío A de números enteros positivos, definimos el conjunto A^+ como el conjunto que se obtiene al sumar 1 a cada elemento de A . Por ejemplo, si $A = \{1, 3, 4, 7\}$ entonces $A^+ = \{2, 4, 5, 8\}$; y si $B = \{6\}$ entonces $B^+ = \{7\}$.

¿Cuántos subconjuntos A de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ cumplen que A y A^+ son conjuntos disjuntos entre sí?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2010)



Sociedad Matemática
Peruana

Cuarta fase - Nivel 2

07 de noviembre de 2010

-
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
 - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
 - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
-

Problema 1. En Duendelandia, cada duende es veraz o mentiroso. Un duende veraz siempre dice la verdad y uno mentiroso siempre miente. En cierta ocasión 10 duendes estaban formando una ronda (de esta forma cada uno tiene dos vecinos: el de la derecha y el de la izquierda) y cada duende dijo «Ninguno de mis vecinos es veraz». ¿Cuál es la mayor cantidad de duendes mentirosos que puede haber en la ronda?

Problema 2. Los enteros positivos $a < b < c$ son tales que los números $a + b$, $a + c$ y $b + c$ son cuadrados perfectos. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar c ?

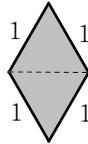
Problema 3. En cada cuadradito de la siguiente expresión se escribe uno de los números 2, 4, 5, 6, 7 en algún orden y sin repetir para obtener una ecuación de cuarto grado:

$$\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square = 2010.$$

Se sabe que, en cualquier orden en que se escriban esos números, la ecuación resultante tiene exactamente una raíz positiva.

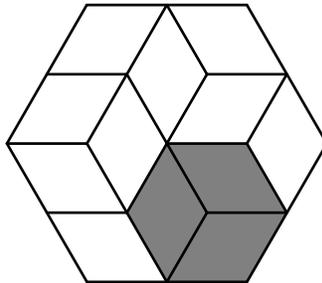
- ¿En qué orden deben escribirse los coeficientes para que la raíz correspondiente sea máxima?
- ¿Es posible escribir los coeficientes en algún orden para que la raíz correspondiente sea un número entero?

Problema 4. Sea n un entero positivo. Un hexágono regular de lado n es dividido en $3n^2$ rombos formados por dos triángulos equiláteros de lado 1, como el que se muestra a continuación:



Demuestra que siempre es posible encontrar 3 de estos rombos que formen un hexágono regular de lado 1.

Ejemplo. En la siguiente figura se muestra un hexágono regular de lado 2 que ha sido cubierto con 12 rombos, y los 3 rombos sombreados forman un hexágono regular de lado 1.





Primera Fase - Nivel 2

30 de junio de 2011

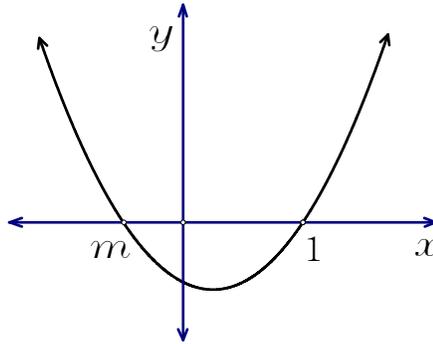
-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{\left(\left((xy)^2 x\right)^3 y\right)^4}{\left((x^2 y)^2 y\right)^8}$
- A) $x^2 y^4$ B) xy^4 C) $x^4 y^2$ D) $x^3 y$ E) $(xy)^4$
2. Entre seis personas deben pagar un total de 144 soles en partes iguales. Algunas de ellas no pagaron y el resto tuvo que pagar 12 soles más, ¿cuántas no pagaron?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
3. Si el lado de un cuadrado es $a + b$ y el lado de otro cuadrado es $a - b$, calcula la diferencia entre las áreas de los cuadrados.
- A) $a^2 - b^2$ B) $2a^2$ C) $2ab$ D) $4ab$ E) $2b^2$
4. En una reunión de profesores de matemática se observó que el 70% trabaja en el turno mañana, 180 trabaja en el turno tarde y el 15% en ambos turnos. ¿Cuántos profesores había en la reunión, si ninguno trabaja en el turno noche?
- A) 400 B) 350 C) 300 D) 280 E) 210
5. Dada la igualdad $16^n + 16^n + 16^n = 6 \times 2^{2011}$, encuentra el valor de $\sqrt[3]{n+9}$.
- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12



6. La gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 + mx + b$ se muestra a continuación:



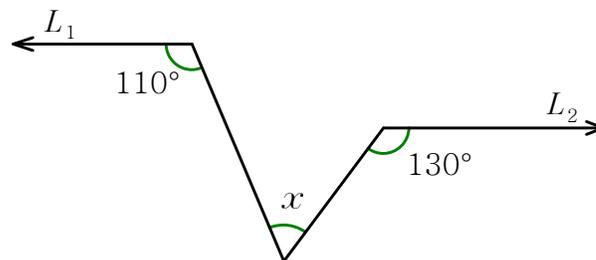
Determina el valor de $f(2)$.

- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $b + 2$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

7. Un comerciante desea llevar las carteras que fabricó a una feria con el siguiente pensamiento: "si vendo mis carteras a 20 dólares cada una, podré comprar una motocicleta y tener 90 dólares de sobra, pero si las vendo a 18 dólares cada una, comprando la motocicleta me sobraría 6 dólares". ¿Cuánto suman el precio de la motocicleta y la cantidad de carteras que tiene el comerciante?

- A) 750 B) 792 C) 834 D) 855 E) 902

8. Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, determina el valor de x .



- A) 50° B) 60° C) 80° D) 70° E) 65°

9. Si el siguiente sistema:

$$3ax + 2by = 16$$

$$x + 2y = 8$$

tiene infinitas soluciones en las variables x, y . Determina el valor de $\frac{3a + b}{2}$.

- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{8}{3}$



10. Hay un anillo escondido en alguna de las tres cajas cerradas que tienen colores diferentes y están etiquetadas con los siguientes enunciados:

- Caja ploma: El anillo no está aquí
- Caja negra: El anillo no está en la caja marrón
- Caja marrón: El anillo está aquí

Si sólo uno de los enunciados es verdadero, entonces podemos asegurar que:

- A) El anillo está en la caja marrón
- B) El anillo está en la caja ploma
- C) El anillo está en la caja negra
- D) El anillo puede estar en cualquiera de las tres cajas.
- E) Ninguna de la anteriores.

11. Sea N el número de obreros que pueden hacer un obra en $3N/4$ días, trabajando $N/3$ horas diarias. Si la cantidad de obreros se duplica, terminarían la misma obra en 72 horas de trabajo. Halla N .

- A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 32

12. Sea n un número entero y p un número tal que $2 < p < 3$. Si $n + p = \frac{2011}{5}$, calcule el valor de n .

- A) 398 B) 399 C) 400 D) 401 E) 402

13. Aumentando la base de un triángulo en 6 metros y la altura en 4 metros, el área aumenta en $120 m^2$. En cambio, si aumentamos la base en 2 metros y la altura en 9 metros, el área aumenta en $160 m^2$. Determina el área de dicho triángulo, en m^2 .

- A) 240 B) 280 C) 320 D) 360 E) 480

14. Si al cuadrado de la edad de Diego se le resta 224 veces el cuadrado de su inversa se obtiene $\frac{121}{2}$, ¿cuál será la edad de Diego dentro de cinco años?

- A) 9 B) 8 C) 13 D) 10 E) 12

15. Un número \overline{abcd} de cuatro dígitos es llamado *equilibrado* si $a + b = c + d$. Por ejemplo, el número 2011 es equilibrado porque $2 + 0 = 1 + 1$. Decida cuántos de los siguientes enunciados son verdaderos:

- El mayor número equilibrado de 4 dígitos distintos es 9687.
- El menor número equilibrado de 4 dígitos distintos es 1230
- El mayor número equilibrado múltiplo de 4 es 9898.
- Todo número equilibrado mayor que 2000 se puede expresar como la suma de dos números equilibrados.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



16. Sea D un punto sobre el lado BC y E un punto sobre el lado AC de un triángulo ABC , tales que $AB = AD = BE$. Sea P el punto de intersección de los segmentos AD y BE . Si $\angle APB = \alpha$ y $\angle ACB = \beta$, encuentra la relación correcta:
 A) $\alpha = 2\beta$ B) $\alpha + 2\beta = 180^\circ$ C) $\alpha + \beta = 180^\circ$ D) $\alpha = 90^\circ + \beta$ E) $\alpha = 3\beta$
17. Para cada entero positivo n sea $S(n)$ la suma de sus dígitos. Por ejemplo, $S(102) = 3$ y $S(55) = 10$. ¿Para cuántos enteros positivos m se cumple que $m + S(m) = 2011$?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
18. Detrás de algunas casillas de un tablero de 6×6 se encuentra escondida una moneda (cada casilla tiene escondida como máximo una moneda). Los números escritos en cada casilla representan la cantidad de casillas vecinas que tienen una moneda escondida.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |

Determina la cantidad de monedas escondidas en todo el tablero.

Aclaración: Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18
19. Cinco equipos juegan un torneo de fútbol, cada equipo se enfrentó a otro exactamente una vez. En cada juego se da 3 puntos al ganador, 0 al perdedor, y en caso de empate se da 1 punto a cada equipo. Si al final del torneo los puntajes de todos los equipos son distintos, halla el menor puntaje que pudo obtener el campeón del torneo.
 A) 8 B) 5 C) 6 D) 4 E) 7
20. Los números reales a , b y c son distintos entre sí y satisfacen:

$$a = \sqrt[3]{1 - 4b - 4c}$$

$$b = \sqrt[3]{1 - 4c - 4a}$$

$$c = \sqrt[3]{1 - 4a - 4b}$$

Halla el valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

- A) 0 B) -8 C) 4 D) 8 E) -4

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

VIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2011)



Sociedad Matemática
Peruana

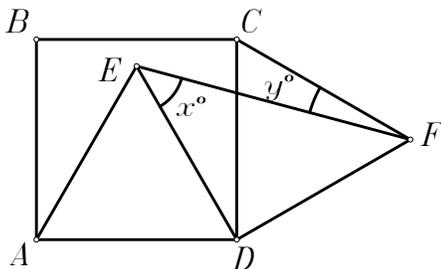
Segunda Fase - Nivel 2

19 de agosto de 2011

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En un molino había cierta cantidad de toneladas de harina y de éstas se vendió la cuarta parte. Luego, se vendió la tercera parte del resto, quedando por vender 24 toneladas. ¿Cuántas toneladas de harina había inicialmente?
2. Un grupo de amigos desea entrar al cine y el monto total a pagar por las entradas (que tienen el mismo valor), es 200 nuevos soles. Al momento de pagar, cinco de ellos no tienen dinero para la entrada, por lo cual todos los demás deben aportar 2 nuevos soles más de lo previsto. ¿Cuánto cuesta la entrada al cine?
3. Sea x la solución real de la ecuación: $2\sqrt{1-x} - \sqrt{8-2x} = 0$. Halla x^2 .
4. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y los triángulos AED y CFD son equiláteros. Halla el valor de $x + y$.





5. Se arrojan tres dados. El resultado del primer dado se multiplica por 7, luego se suma al resultado del segundo dado y se multiplica todo por 7, por último, se suma el resultado del tercer dado, obteniéndose 136. ¿Cuál es la suma de los resultados de los tres dados?
6. En cada casilla del siguiente tablero está escrito un número (algunos están ocultos), de tal forma que la suma de los números escritos en 3 casillas consecutivas (en la misma fila o en la misma columna) siempre es 6. Halla la suma de los números escritos en todas las casillas del tablero.

| | | | | | | |
|--|---|---|--|--|---|--|
| | | | | | | |
| | | 2 | | | | |
| | | | | | | |
| | 3 | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | 5 | |
| | | | | | | |

7. Sea a_1, a_2, \dots, a_{100} , una secuencia de 100 términos donde $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_3 = 2$ y en la cual se cumple que la suma de cuatro términos consecutivos es igual a su producto. Halla la suma de todos los términos de la secuencia.
8. M y N son dos enteros positivos de 6 dígitos o menos. La suma de los dígitos de M y N son 31 y 37, respectivamente. ¿Cuántos valores distintos puede tomar la suma de los dígitos de $M + N$?
9. Doce caballeros están sentados alrededor de una mesa redonda. Cada caballero desconfía de los dos que están sentados a sus lados, pero no de los otros nueve. Se debe formar un grupo de tres caballeros para ir a rescatar a una princesa, de tal modo que ninguno de ellos desconfíe de alguno de los otros dos. ¿De cuántas maneras se puede formar el grupo?
10. La suma de $m + n$ enteros positivos distintos es 2011, m de ellos son pares y los otros n son impares. Halla el mayor valor que puede tomar $3m + 4n$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

VIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2011)



Sociedad Matemática
Peruana

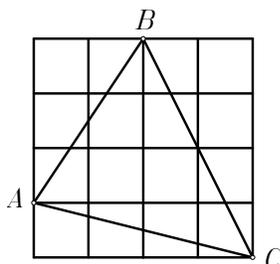
Tercera Fase - Nivel 2

30 de setiembre de 2011

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Un ómnibus, que cobra 8 soles como pasaje único, salió de Lima a Cerro Azul. En cada paradero siempre bajaban dos pasajeros y luego subían tres. Además se sabe que a Cerro Azul llegaron 44 pasajeros y que se recaudó 560 soles. ¿Cuántos pasajeros partieron de Lima?
2. Una compañía de juguetes vendió 5000 unidades el año pasado, de las cuales el 10% fueron peluches. Este año, han vendido 1000 unidades más que el año anterior, donde los peluches representaron el 12% del total. En qué porcentaje, respecto del año anterior, se incrementó la cantidad de peluches vendidos?
3. Un padre y su hijo caminan en línea recta y en la misma dirección. Tres pasos consecutivos del padre cubren una distancia igual a la que cubren cinco pasos consecutivos del hijo; sin embargo, mientras que el padre da seis pasos, el hijo da siete pasos. El padre empieza a caminar luego de que su hijo dio 30 pasos. ¿Después de cuantos pasos del padre, éste logra alcanzar a su hijo?
4. Halla el área del triángulo ABC sabiendo que todos los cuadraditos son de lado 1.





-
5. El polinomio $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + px + q$ es igual al producto de los dos polinomios siguientes: $x^2 + ax + b$, $x^2 - bx + a$, donde $a \neq -1$. Halla $a + b + p + q$.
6. Un entero positivo es divisible por todos los enteros del 1 al 20 excepto por dos de ellos, los cuales son consecutivos. Halla la suma de esos dos números.
7. Un número natural de cuatro dígitos es llamado *elegante* si no es múltiplo de 10 y al ser sumado con el número que resulta al invertir el orden de sus dígitos se obtiene un número de cuatro dígitos que es capicúa. Por ejemplo, 2011 es elegante pues no es múltiplo de 10 y además $2011 + 1102 = 3113$ es un número capicúa de cuatro dígitos. ¿Cuántos números de cuatro dígitos son elegantes?
8. Si f es una función real de variable real tal que $f(2f(x)) = x$, para todo número real x , determina el valor de $f(f(6) + 6f(3))$.
9. La bóveda de un banco tiene N cerraduras de modo que para abrir la bóveda se deben abrir todas las N cerraduras simultáneamente. Cinco ejecutivos trabajan en el banco y cada uno de ellos tiene algunas de las llaves de las cerraduras, de tal modo que tres cualesquiera de ellos pueden abrir la bóveda, pero ningún par de ellos puede hacerlo. Halla el menor valor de N .
10. Sea M un conjunto finito de puntos en el plano. Para cada $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, existe una circunferencia que pasa por exactamente i puntos de M . ¿Cuál es la menor cantidad de elementos que puede tener M ?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Ministerio
de Educación

VIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2011)



Sociedad Matemática
Peruana

Cuarta Fase - Nivel 2

6 de noviembre de 2011

-
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
 - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
 - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
-

Problema 1. Considera la siguiente igualdad:

$$\overline{MACHU} + \overline{PICCHU} = \overline{100AÑOS}$$

donde letras distintas representan dígitos distintos.

- Determina el valor de C .
- Prueba que $H \geq 6$.
- Determina el valor de A .

Problema 2. Encuentra todas las soluciones de la ecuación:

$$(xyz)^2 = 12(x-1)(2y-1)(2z-3),$$

donde x , y y z son números reales tales que $x \geq 1$, $y \geq \frac{1}{2}$ y $z \geq \frac{3}{2}$.

Problema 3. Javier y Paul juegan por turnos de la siguiente manera: En el turno 1, Javier escribe 1 ó 2 en la pizarra; en el turno 2, Paul escribe 2 ó 3; en el turno 3, Javier escribe 3 ó 4, y así sucesivamente hasta el turno n y finaliza el juego. Javier gana si la suma de todos los números escritos es múltiplo de 3, en cualquier otro caso gana Paul.

Determina quién de los dos tiene estrategia ganadora, en cada uno de los siguientes casos:

- Cuando n es par.
- Cuando $n = 2011$.



Ministerio
de Educación

Cuarta Fase - Nivel 2



Sociedad Matemática
Peruana

Problema 4.

- a) Demuestra que existe un polinomio $P(x)$ de coeficientes racionales tal que, para todo entero positivo n , se cumple que:

$$1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + \dots + n^{100} = P(n).$$

- b) Para dicho polinomio $P(x)$, calcula los valores numéricos de $P(0)$, $P(-1)$ y $P(-2)$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



IX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2012)

Primera Fase - Nivel 2

29 de agosto de 2012

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

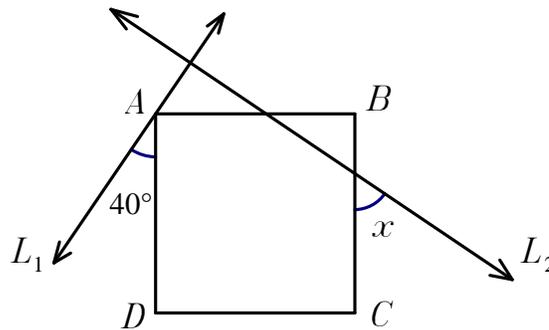
MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Las edades de un padre y su hijo son 35 y 11 respectivamente, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será el doble de la del hijo?
A) 11 B) 24 C) 12 D) 35 E) 13
2. Si $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ y $\frac{b}{c} = \frac{1}{4}$, calcular $\frac{a-b}{b-c}$.
A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$
3. En una tienda cada caramelo cuesta 10 céntimos y por la compra de cinco caramelos regalan un caramelo más. Si un niño recibió 32 caramelos, ¿Cuánto gastó en total?
A) S/. 2,5 B) S/. 2,7 C) S/. 3 D) S/. 3,2 E) S/. 3,8
4. En un salón de clase hay 10 niñas más que niños. Un día faltaron 3 niñas y 2 niños, y se contó en total 31 alumnos. ¿Cuántos niños asistieron ese día?
A) 10 B) 11 C) 13 D) 20 E) 23
5. Una encuesta realizada a un grupo de alumnos de cierto colegio sobre el tiempo dedicado a los videojuegos semanalmente estaba dividida en 4 categorías: 0 a 2 horas, 2 a 6 horas, 6 a 8 horas y más de 8 horas. Si el 50 % juega de 0 a 2 horas, el 44 % juega de 2 a 8 horas y el 9 % juega de 6 horas a más, ¿qué porcentaje juega de 2 a 6 horas?
A) 41 % B) 47 % C) 44 % D) 46 % E) 40 %

Primera Fase - Nivel 2

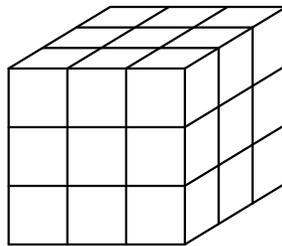
6. El profesor le pidió a Pedrito escribir en la pizarra un número de tres dígitos que sea múltiplo de 3 pero no de 4, ¿cuál de los siguientes números pudo haber escrito Pedrito?
- A) 216 B) 254 C) 228 D) 240 E) 222

7. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares. Halla la medida del ángulo x .



- A) 40° B) 45° C) 50° D) 60° E) 70°

8. Se pinta de rojo las seis caras de un cubo de 3 cm de arista. Luego se recorta el cubo en pequeños cubos de arista 1 cm, tal como se muestra en la figura. ¿Cuántos de estos cubos de arista 1 cm tienen exactamente dos caras pintadas de rojo?



- A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 24

9. Decimos que un anagrama formado con las letras A, A, B, B, C, C es *acceptable* si la secuencia ABC aparece al menos una vez. Por ejemplo, el anagrama CBABCA es acceptable pero ACBACB no lo es. ¿Cuántos anagramas aceptables formados con dichas letras existen?
- A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

10. Si a, b, c, d son dígitos tales que $(\overline{ab2})^2 = (\overline{cd})^3$, calcula el valor de $a + b + c + d$.
- A) 14 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19



Primera Fase - Nivel 2

11. María debe comprar pastelitos para 7 personas, dándole a cada uno la misma cantidad de pastelitos. En la tienda solo venden pastelitos en cajas de 8 ó 15 unidades. ¿Cuántos cajas debe comprar María como mínimo?
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
12. Tengo una bolsa de canicas, cada una de ellas es de color azul, rojo o verde. Si hay al menos 10 canicas que no son azules, 20 canicas que no son rojas y 40 canicas que no son verdes, ¿cuántas canicas como mínimo tengo en la bolsa?
- A) 35 B) 42 C) 36 D) 41 E) 37
13. La suma de los cuadrados de tres reales positivos es 160. Uno de esos números es igual a la suma de los otros dos. La diferencia entre los dos números menores es 4. ¿Cuál es la diferencia de los cubos de los dos números menores?
- A) 320 B) 360 C) 400 D) 480 E) 640
14. ¿Qué elemento se debe eliminar del conjunto $\{42, 44, 45, 60, 80\}$ para que el mínimo común múltiplo de los cuatro elementos restantes sea el mayor posible?
- A) 42 B) 44 C) 45 D) 60 E) 80
15. Decimos que un número de 4 dígitos es *apocalíptico* si tiene al menos un 0, un 1 y un 2 entre sus dígitos. Por ejemplo el 2012 es apocalíptico. Determina cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas
- 9210 es el mayor número apocalíptico.
 - 1012 es el menor número apocalíptico.
 - No existe número apocalíptico que sea múltiplo de 101.
 - Ningún número apocalíptico se puede expresar como la suma de dos números apocalípticos.
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

16. Los números reales a, b, c, d son no nulos y tienen suma 0, además

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} = 0.$$

Halla $(ab - cd)(c + d)$.

- A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

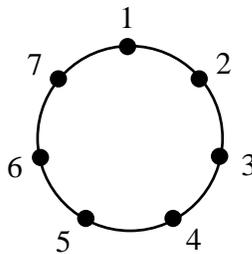


Primera Fase - Nivel 2

17. Determinar cuántos números de 4 dígitos son tales que al borrar cualquier dígito el número de 3 dígitos resultante sea un divisor del número original.

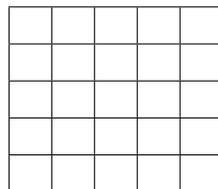
- A) 14 B) 9 C) 13 D) 10 E) 15

18. En la figura mostrada se puede aplicar la siguiente operación: se elige dos números adyacentes y se le suma la misma cantidad entera a ambos. ¿Cuántas operaciones se necesitan como mínimo para que los siete números sean iguales?



- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19. En un tablero de 5×5 fueron pintadas N casillas de tal modo que cada subtablero de 2×2 contiene exactamente 2 casillas pintadas y cada subtablero de 3×3 contiene 4 ó 5 casillas pintadas. ¿Cuántos valores puede tomar N ?



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. Halla el coeficiente de x^{2012} al desarrollar el siguiente producto:

$$(1 + x)^2(1 + x^3)^2(1 + x^9)^2(1 + x^{27})^2(1 + x^{81})^2(1 + x^{243})^2(1 + x^{729})^2.$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

IX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2012)

Segunda Fase - Nivel 2

28 de setiembre de 2012

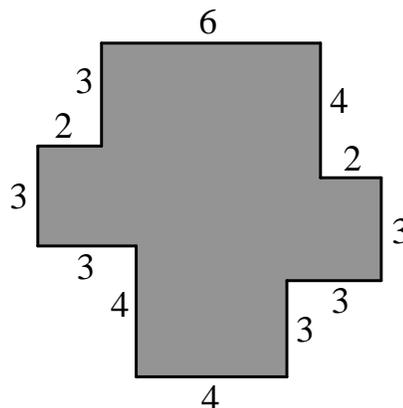
Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

IMPORTANTE: ESTA PRUEBA TIENE VALIDEZ SOLAMENTE SI SE TOMA EL DÍA 28 DE SETIEMBRE.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

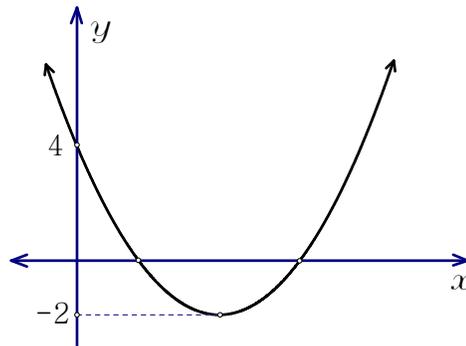
1. Saúl ha recibido como herencia un terreno como el que se muestra a continuación, en él se cumple que dos lados consecutivos son siempre perpendiculares. Determine cuántos m^2 (metros cuadrados) mide el área de dicho terreno, si las longitudes mostradas en la figura están expresadas todas en metros.





Segunda Fase - Nivel 2

- Una empresa tiene cierta cantidad de trabajadores, y cada uno recibió S/ 650.00 de gratificación. Fernando, que le debía dinero a todos su compañeros, gastó toda su gratificación pagando sus deudas, de esta forma todos sus compañeros tienen ahora S/ 800.00, a excepción de uno de ellos que tiene S/ 850.00. ¿Cuántos trabajadores tiene la empresa, incluyendo a Fernando?
- Un día los alumnos le pidieron a su profesor información sobre su edad. Él les respondió de la siguiente manera: Mi edad actual es un múltiplo de 5, hace 2 años fue un múltiplo de 11 y el siguiente año será un cuadrado perfecto menor que 100. ¿Cuál es la edad actual del profesor?
- En la pizarra están escritos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ¿Cuántos números debo borrar como mínimo para que el producto de los números que queden en la pizarra sea 630 ?
- Se tiene un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica se muestra a continuación:



Si la suma de las raíces de $P(x)$ es 5, determina $P(5)$.

- Si a y b son números reales tales que

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 900$$

$$a^2 + ab + b^2 = 45.$$

Calcula el valor de $(2a - 2b)^2$.

- En el bolsillo izquierdo tengo 5 canicas rojas y 6 azules, todas ellas tienen 1 cm de diámetro. En el bolsillo derecho tengo 3 canicas rojas y 4 canicas azules, todas ellas tienen 2 cm de diámetro. Debo sacar, sin ver, n canicas del bolsillo izquierdo y n canicas del bolsillo derecho. Determine el menor valor posible de n para el cual tengo la seguridad de encontrar entre todas las canicas que saqué dos canicas del mismo color pero de tamaños diferentes.



Segunda Fase - Nivel 2

8. Los padres de Juanito le regalaron a su hijo un terreno dividido en 16 parcelas cuadradas, algunas eran de su mamá (las marcadas con la letra M) y las otras de su papá (las marcadas con la letra P)

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| P | P | M | M |
| P | P | M | M |
| M | M | P | P |
| M | M | P | P |

Juanito quiere construir su casa, usando algunas parcelas, de tal modo que su base sea un rectángulo. ¿De cuántas formas puede escoger la base de su casa si ésta debe contener al menos una parcela de su papá (P) y al menos una de su mamá (M)?

Aclaración: Considere que los cuadrados también son rectángulos, es decir, la base de la casa también puede ser un cuadrado.

9. Determine cuántos enteros positivos N cumplen las siguientes condiciones a la vez:
- $300 \leq N \leq 500$.
 - Los tres menores divisores positivos de N son 1, 3 y 9.
10. Una ficha de dominó está formada por dos cuadraditos unitarios pegados, es decir, es un rectángulo de 1×2 o de 2×1 . El siguiente tablero es cubierto con 8 fichas de dominó, luego, se multiplican los dos números que son cubiertos por la misma ficha y se suman estos ocho productos. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar esta suma final?

| | | | |
|----|----|----|----|
| 7 | 15 | 6 | 11 |
| 16 | 8 | 14 | 3 |
| 5 | 12 | 2 | 10 |
| 13 | 4 | 9 | 1 |

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



IX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2012)

Tercera Fase - Nivel 2

26 de octubre de 2012

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

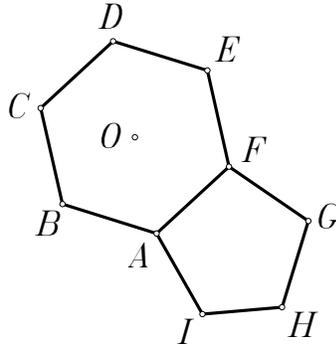
- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE LA RESPUESTA DE CADA PROBLEMA
EN EL ESPACIO CORRESPONDIENTE.
LA RESPUESTA SIEMPRE ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Un número natural tiene todos sus dígitos distintos y el producto de ellos es n . ¿Cuántos elementos del conjunto $\{126, 128, 130, 132, 135\}$ son posibles valores de n ?
2. En una reunión se observa que la sexta parte del total de personas están paradas, mientras que la séptima parte del total de sillas están desocupadas. Si todas las personas quisieran sentarse, harían falta 2 sillas más. ¿Cuántas personas hay en la reunión?
3. Andrea y Paola son dos amigas que están hospedadas en un hotel que tiene muchos pisos. En el piso 1 del hotel no hay habitaciones, en el piso 2 del hotel están las habitaciones del 1 al 10, en el piso 3 están las habitaciones del 11 al 20, en el piso 4 están las habitaciones del 21 al 30, etc. El número de piso en el que Andrea está hospedada coincide con el número de habitación en la que Paola está hospedada. Si sumamos el número de habitación de Andrea con el número de habitación de Paola obtenemos 115. ¿Cuál es el número de la habitación en la que está hospedada Andrea?

Tercera Fase - Nivel 2

4. Si los polígonos mostrados son regulares, y O es el centro del hexágono regular, halle la medida del ángulo $\angle FOI$ (expresada en grados sexagesimales)



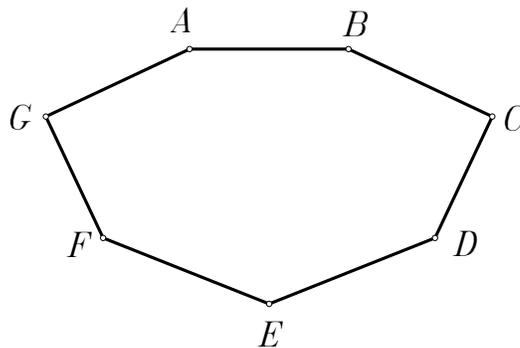
5. Determine cuántas soluciones reales tiene la siguiente ecuación:

$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (2^x + 4^x - 6)^3$$

6. En la figura se muestra un heptágono $ABCDEFG$ que tiene todos sus lados de longitud 2. Se cumple que $\angle DEF = 120^\circ$, $\angle BCD = \angle FGA = 90^\circ$ y, además:

$$\angle GAB = \angle ABC = \angle CDE = \angle EFG.$$

Si el área del heptágono es S , determine el número entero n tal que $n \leq S < n + 1$.

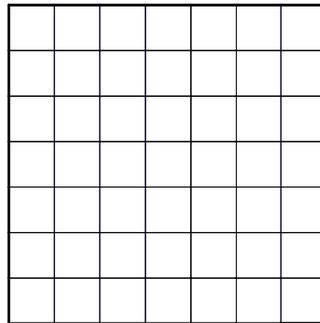


7. Encuentre el menor entero positivo N que cumple las siguientes propiedades (a la vez):
- N no es múltiplo de 5.
 - Si multiplicamos N por 2012, y borramos los dígitos 0 del resultado (si los hubiera) obtenemos un número que tiene todos sus dígitos distintos.



Tercera Fase - Nivel 2

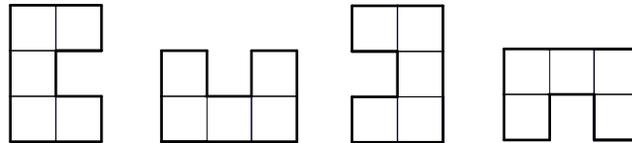
8. En cada casilla de un tablero de 7×7 se tiene que escribir un 1 o un 2 de tal forma que cada rectángulo de 1×4 o de 4×1 contenga siempre cuatro números cuya suma es par. Halle el número de formas en que se puede hacer esto.



9. ¿Cuántos enteros positivos \overline{abcd} , de 4 dígitos no nulos, satisfacen la siguiente igualdad?

$$(2a - 1)(2b - 1)(2c - 1)(2d - 1) = 2abcd - 1$$

10. Las siguientes fichas, formadas por 5 cuadraditos cada una, son llamadas *C-pentominós*:



Algunas casillas de un tablero de 10×10 son pintadas de negro, de tal modo que cualquier *C-pentominó* incluido en el tablero contenga al menos una casilla pintada de negro. Determine la menor cantidad de casillas que se pueden pintar para que esto ocurra.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



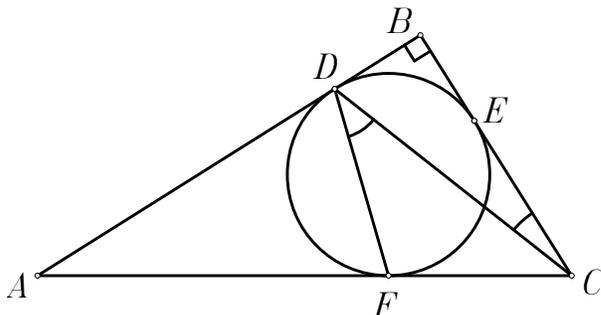
IX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2012)

Cuarta Fase - Nivel 2

25 de noviembre de 2012

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas dudas en los enunciados de los problemas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema vale **25 puntos**.

1. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se ha trazado su circunferencia inscrita, la cual es tangente al lado AB en D , al lado BC en E y al lado AC en F . Si $\angle FDC = 2\angle DCB$, demuestre que $AF = BC$.



2. Encuentre todas las parejas (a, b) de números reales tales que:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b-4} = \sqrt{ab} + 2.$$

3. En la pizarra están escritos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. Una *operación* consiste en elegir dos números a y b , y cambiar uno de ellos por $a + b$ y el otro por $|2a - b|$ ó $|2b - a|$.
- a) Demuestre que después de realizar algunas operaciones es posible obtener 10 números iguales.



Cuarta Fase - Nivel 2

- b) Si después de realizar algunas operaciones se consigue 10 números iguales a k , determine el menor valor que puede tomar k .

Aclaración: $|x|$ denota el valor absoluto de x , por ejemplo, $|4| = 4$ y $|-3| = 3$.

4. Una *potencia* es un número que se puede expresar de la forma a^b , donde a y b son enteros mayores que 1.

¿Existe un conjunto \mathcal{X} de 25 enteros positivos impares, menores que 21000, de tal modo que para cualquier subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ de \mathcal{X} , con $6 \leq k \leq 10$, y cualesquiera números a_1, a_2, \dots, a_k , con $a_i \in \{1, 2\}$ y $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 10$, la suma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$ sea siempre una potencia?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

Primera Fase - Nivel 2

23 de agosto de 2013

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Una empresa que se dedica al remate de propiedades y automóviles publicó en el periódico un anuncio de remate de un automóvil a un precio base de \$ 3270. Al momento del remate, como el precio base no interesó mucho al público, se tuvo que reducir en \$ 350. El primer postor ofreció \$ 50 más del precio base, el segundo postor ofreció \$ 20 más que el primer postor, el tercero \$ 30 más que el segundo postor, y finalmente se adjudica el remate un cuarto postor que paga un total de \$ 3170. ¿Cuánto más que el tercer postor ofreció pagar el cuarto postor?
A) \$ 150 B) \$ 90 C) \$ 210 D) \$ 130 E) 200
2. Pedro tiene 85 billetes entre billetes de S/. 50 y S/. 20 nuevos soles, si en total Pedro tiene S/. 2300 nuevos soles. ¿Cuántos billetes hay más de un tipo que del otro?
A) 10 B) 20 C) 45 D) 65 E) 40
3. La cuarta parte de una cuadrilla de obreros puede realizar la sexta parte de una obra en 4 días. ¿Cuántos días le tomaría a la cuadrilla completa realizar dicha obra?
A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 12
4. Carlitos estudia en el Instituto de Matemática. La nota final del curso de Álgebra es el promedio de las siguientes tres notas: el examen parcial, el examen final y el promedio de prácticas. Carlitos obtuvo 13 en el examen parcial y 12 como promedio de prácticas. Sabiendo que en el Instituto de Matemática se aprueba con nota mínima 14, ¿cuántos puntos como mínimo debe obtener Carlitos en el examen final para poder aprobar este curso?
A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18
5. Sean m y n números enteros positivos, con $m > n$, para los cuales definimos los polinomios:

$$P(x) = x^m + 2x^n + 1,$$

$$Q(x) = x^{m+n} - x^m + 1.$$

Si al sumar los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos un polinomio de grado 7, y al multiplicar los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos un polinomio de grado 12, halla $m^2 + n^2$.

- A) 17 B) 29 C) 34 D) 13 E) 20



Primera Fase - Nivel 2

6. Si x y t son números reales positivos tales que $\frac{1}{x} - \frac{1}{t} = 42$, determine el valor de:

$$\frac{x(60t + 1) - t}{t(3x + 1) - x}$$

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

7. Cuando se deja caer un objeto, la relación entre la distancia d que recorre el objeto y el tiempo transcurrido t viene dada por

$$d = 4,9 \cdot t^2,$$

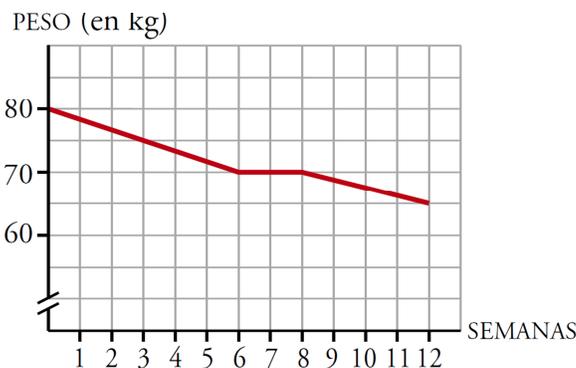
donde d está expresada en metros y t en segundos. Javier dejó caer una pelota desde un malecón. La pelota tardó 1,1 segundos en llegar al agua. ¿Cuántos metros viajó la pelota? Redondea tu respuesta al entero más cercano.

- A) 5 m B) 6 m C) 7 m D) 8 m E) 9 m

8. En un colegio de 200 alumnos el 60% son varones. En una encuesta se reveló que el 78% del total de alumnos recibe ayuda para hacer sus tareas y el resto no, además, el número de mujeres que recibe ayuda para hacer sus tareas es igual a 4 veces el número de varones que no lo hacen. ¿Qué porcentaje **de las mujeres** hacen solas su tarea?

- A) 36% B) 40% C) 44% D) 48% E) 60%

9. El nutricionista ha puesto a Ricardo a un régimen de adelgazamiento y ha hecho esta gráfica para explicarle lo que espera conseguir en las 12 semanas que dure la dieta.



¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el peso P de Ricardo en función del número x de semanas, si consideramos solamente la primera etapa del régimen (6 semanas)?

- A) $P = -\frac{5x}{3} + 80$
B) $P = -\frac{5x}{6} + 80$
C) $P = \frac{5x}{3} + 80$
D) $P = 70 + \frac{5x}{3}$
E) $P = 70 - \frac{5x}{3}$

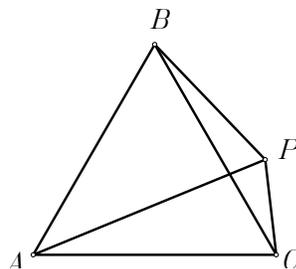


Primera Fase - Nivel 2

10. Si p y q son dos números primos tales que $p + q + 4$ y $pq - 12$ también son números primos. Halla $p + q$.
- A) 7 B) 10 C) 8 D) 12 E) 9
11. Dos números naturales consecutivos cumplen que la diferencia positiva de sus raíces cuadradas es menor que $\frac{1}{10}$. Halla el menor valor que puede tomar la suma de esos dos números naturales.
- A) 11 B) 49 C) 51 D) 99 E) 101
12. Sean M un número de 4 dígitos y N el número de 3 dígitos que resulta al eliminar el dígito de las unidades de M . Si $M + N = 2013$, halla la suma de los dígitos de N .
- A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11
13. Sean a y b dos reales positivos. Al dividir $2x^4 - 3x^3 + (4b + 1)x^2 - (a + 4b)x + 2b^2$ entre $x^2 - x - a$ se obtiene 72 de resto. Halla $a + b$.
- A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 18
14. En cada casilla del siguiente tablero está escrito uno de los números 1, 2, 3 ó 4, pero sólo se muestran cuatro. Además, en cada subtablero de 2×2 todos los números que aparecen son distintos. ¿Determinar qué números pueden estar en la casilla marcada con una x ?

| | | | | | |
|--|---|---|-----|---|--|
| | | | x | | |
| | 1 | | | | |
| | | | | 4 | |
| | | | | 3 | |
| | | 2 | | | |
| | | | | | |

- A) 1 ó 4 B) sólo 2 C) sólo 4 D) 2 ó 4 E) 1, 2 ó 4
15. En la figura mostrada ABC es un triángulo equilátero y P es un punto exterior al triángulo tal que $\angle APC = 80^\circ$ y el triángulo APC es isósceles. Determine la medida del ángulo $\angle APB$.



- A) 60° B) 80° C) 75° D) 85° E) 70°

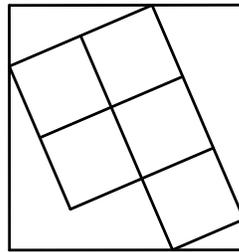


Primera Fase - Nivel 2

16. Sean $A > B > C$ tres divisores del número $P = 2013 \times 2014$ tales que $A + B + C$ es un múltiplo de P . Halla $\frac{A+B}{C}$.

- A) 5
- B) $\frac{9}{2}$
- C) 4
- D) 3
- E) 2

17. Cinco cuadrados pequeños están en el interior de un cuadrado mayor, como muestra la figura. Si el área de cada cuadrado pequeño es 5, determina el área del cuadrado mayor.



- A) 25
- B) 45
- C) 49
- D) 50
- E) 64

18. Un número de cuatro dígitos es llamado *conjeturable* si todos sus dígitos son distintos y uno de ellos es igual a la suma de los otros tres. Por ejemplo, el 2013 es conjeturable. ¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son correctas?

- El menor número conjeturable es el 1203.
- El mayor número conjeturable es el 9810.
- Existe un entero positivo N tal que N y $5N$ sean conjeturables.
- Existe un número conjeturable que es múltiplo de 11.
- Hay menos de 1800 números conjeturables.

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

19. Sean a, b, c tres números reales, cada uno de ellos distinto de 0, tales que:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} = \frac{b}{2a}, \quad \frac{b}{a} + \frac{a}{c} = \frac{3c}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = N \cdot \frac{a}{c},$$

halla el valor de N .

- A) 5
- B) 6
- C) 11
- D) 12
- E) 15



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 2

20. Un torneo de tenis se realiza de la siguiente forma: En cada ronda, si el número de participantes es par se forman parejas con los participantes. En cambio, si el número de participantes es impar, se hace un sorteo y uno de los participantes pasa directamente a la siguiente ronda, luego, se forman parejas con los participantes. Los participantes de cada pareja se enfrentan, y el ganador de cada partido pasa a la siguiente ronda. El torneo acaba cuando hay un ganador absoluto (recuerde que en el tenis no hay empates). Sea $f(n)$ el número de rondas que habrá en un torneo de n participantes. Por ejemplo, $f(3) = 2$ y $f(5) = 3$. Determine la suma de los dígitos del menor entero positivo m que satisface la igualdad $f(m) = f(2013)$.
- A) 9 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

Importante:

No publicar esta prueba en internet, u otro medio, hasta el día 22 de setiembre.

Para los encargados de tomar el examen: Recordar que los alumnos no se pueden llevar los enunciados.



X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

Segunda Fase - Nivel 2

13 de setiembre de 2013

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

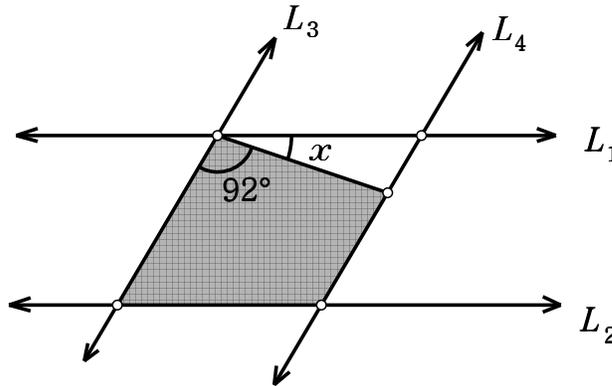
- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En un evento deportivo hay 150 personas. Se sabe que hay 50 personas que no usan polo blanco y que todas las mujeres usan polo blanco. Si el número de hombres es mayor en 10 que el número de mujeres, ¿cuántos hombres usan polo blanco?
2. Sean $a > b > 0$ números enteros tales que $\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2} = \frac{5}{3}$. Halla el valor de $\frac{a}{b}$.
3. Pablo tiene que recorrer una distancia de 6 kilómetros para llegar a su escuela, para ello cuenta con una bicicleta que en algunas ocasiones deja en la casa de su tía antes de llegar a la escuela. Se sabe que la casa de la tía de Pablo está a 15 minutos en bicicleta de la escuela. Si Pablo viaja en bicicleta todo el camino de su casa a la escuela, se demora 60 minutos, en cambio si lo hace a pie, se demora 120 minutos. ¿Cuántos minutos se demoró Pablo en llegar a su escuela, si se sabe que empezó su recorrido en bicicleta, la cual dejó en la casa de su tía, para luego continuar a pie?

Segunda Fase - Nivel 2

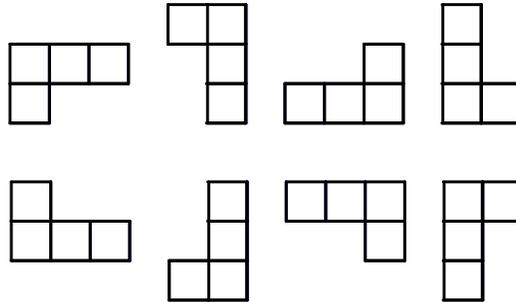
4. En la figura mostrada, las rectas L_1 y L_2 son paralelas, y también las rectas L_3 y L_4 son paralelas. El cuadrilátero sombreado tiene un ángulo interior de medida 92° , y además cumple que su menor ángulo interior es igual a la mitad de su mayor ángulo interior, determina la medida del ángulo x en grados sexagesimales.



5. Sea N el menor entero positivo que es múltiplo de 72 y en cuya escritura sólo se usan los dígitos 8 y 9, con al menos uno de cada uno. Halla la suma de los cuatro últimos dígitos de N , es decir, la suma de los cuatro dígitos de la derecha.
6. En un cuadrilátero $ABCD$, en donde AD y BC son paralelos y además $AD > BC$, se cumple que $\angle ABC = 2\angle ADC$. Si $BC = 7$, $CD = 17$ y $AD = 20$, determina la longitud del perímetro del cuadrilátero $ABCD$.
7. Sean a, b, c números enteros diferentes entre sí, tales que el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ cumple que $P(a) = a^3$ y $P(b) = b^3$. Halla el valor de $P(1)$.
8. Se hace una lista en orden creciente, de todos los números de 7 dígitos no divisibles por 5, que usan exactamente una vez cada uno de los dígitos 1,2,3,4,5,6,7 en su escritura. Halla el número que ocupa la posición 2013 en esa lista y da como respuesta el resto de dividir dicho número entre 1000.
9. Sean a, b, c números primos tales que $a < b < c < 100$ y además $a + 1, b + 1, c + 1$ forman una progresión geométrica. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $a + b + c$?

Segunda Fase - Nivel 2

10. Las siguientes figuras son llamadas *L-tetrominós*, donde cada una está formada por cuatro cuadraditos.



Cada cuadradito de un tablero de 8×8 se ha pintado de un color, de tal forma que si escogemos cuatro cuadraditos cualesquiera que forman un *L-tetrominó* entonces esos cuatro cuadraditos tienen colores diferentes. Determina el menor número de colores que se pudieron haber usado en total para que esta situación sea posible.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

Tercera Fase - Nivel 2

11 de octubre de 2013

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE LA RESPUESTA DE CADA PROBLEMA
EN EL ESPACIO CORRESPONDIENTE.
LA RESPUESTA SIEMPRE ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En cierta universidad se hizo un estudio estadístico, el cual nos brindó la siguiente información: El número de estudiantes varones y el número de estudiantes mujeres están en la relación de 7 a 9. El número de estudiantes varones que usan la biblioteca y el número de los que no la usan están en la relación de 2 a 3. Con esta información se obtiene que el número de estudiantes varones que usan la biblioteca y el número total de estudiantes de la universidad están en la relación de m a n , donde m y n son enteros positivos primos entre sí. Halla el valor de $m + n$.
Aclaración: Dos números son *primos entre sí* si su máximo común divisor es 1.
2. Para cada entero positivo n definimos $S(n)$ como la suma de los dígitos de n , por ejemplo $S(2013) = 2 + 0 + 1 + 3 = 6$.
Si a y b son dígitos tales que los tres números $S(a + b)$, $a + b$, \overline{ab} forman una progresión aritmética estrictamente creciente, halla el valor de $20a + 13b$.



Tercera Fase - Nivel 2

3. En un triángulo isósceles ABC , donde $AB = BC$, se ubica el punto E en la prolongación del lado AC (C está entre A y E) y en el segmento BE se ubica el punto F , de tal modo que $AC = CF = FE$ y $\angle BAF = 3\angle FAE$. Halla la medida del ángulo $\angle FAE$.

4. Pedro tiene una bolsa con 13 tarjetas numeradas del 1 al 13. ¿Cuál es la mínima cantidad de tarjetas que Pedro debe sacar de la bolsa, sin ver, para tener la certeza de que tres de las tarjetas extraídas tienen numeración consecutiva?

5. El número de tres dígitos \overline{ABC} es un cuadrado perfecto y el número de dos dígitos \overline{BC} es primo, determina el mayor valor posible de $A + B + C$.

6. Un número de 9 dígitos que se obtiene al reordenar los dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8 es llamado *colorido* si los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4 aparecen en ese orden de izquierda a derecha y los dígitos 8, 7, 6 y 5 también aparecen en ese orden de izquierda a derecha. Por ejemplo, 870612534 es un número colorido. Determina cuántos números coloridos hay en total.
Aclaración: Tenga en cuenta que el dígito 0 no puede aparecer a la izquierda de un número.

7. La raíz real de la ecuación $8x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$ se puede escribir de la forma $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + 1}{c}$, donde a, b, c son enteros positivos. Encuentra el valor de $a + b + c$.

8. En una reunión hay 15 políticos. Cada político debe votar por k de los otros políticos. Halla el menor valor de k para el cual se tiene la seguridad de que habrá dos políticos A y B , tales que A votó por B y B votó por A .

9. Doce enteros positivos son ubicados alrededor de un círculo de tal manera que cada uno de ellos es igual a 2 más el máximo común divisor de sus dos vecinos, el de su izquierda y el de su derecha. Halla el mayor valor que puede tomar la suma de los doce enteros positivos.



Tercera Fase - Nivel 2

10. Los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ cumplen que todos sus coeficientes son reales no negativos y además:

- $P(x) \cdot Q(x) = x^{12} \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)^3$,
- $P(x) \cdot P(x^3) = 2P(x^2) \cdot Q(x) - [Q(x)]^2$.

Halla el valor de $P(2)$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

Cuarta Fase - Nivel 2

17 de noviembre de 2013

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

-
1. En un juego hay 3 cajas cerradas, cada una de las cajas contiene 20 bolitas, pero no se sabe con exactitud el contenido de cada caja. Solo sabemos que una de las cajas contiene 10 bolitas blancas y 10 bolitas rojas; otra de las cajas contiene 10 bolitas rojas y 10 bolitas azules; y en la otra caja hay 10 bolitas azules y 10 bolitas blancas. Emilio, en cada jugada, debe retirar una bolita de alguna de las cajas. Muestra una manera de jugar con la que Emilio pueda obtener con certeza una bolita blanca, como máximo en 13 jugadas.

Aclaración: Emilio puede cambiar de caja luego de una jugada si lo desea.

2. Para cada entero positivo n sea $P(n)$ el producto de los dígitos de n . Por ejemplo, $P(10) = 0$ y $P(216) = 12$. Halla el menor entero positivo m que cumple las siguientes dos condiciones:
- $P(m) - P(m + 2) = 990$,
 - m es múltiplo de 11.



Cuarta Fase - Nivel 2

3. a) Prueba que para todo entero positivo par $n \geq 4$, existe un polígono convexo de n lados de tal modo que el número de triángulos isósceles que se pueden formar con 3 de sus vértices es mayor o igual que

$$\frac{(n-2)(3n-4)}{4}.$$

- b) Si se pintan de rojo 25 puntos de una circunferencia, de tal forma que cualesquiera dos segmentos que tienen sus extremos en puntos rojos no sean perpendiculares, ¿como máximo, cuántos triángulos isósceles tienen sus vértices en tres puntos rojos?

4. Si x, y, z son números reales tales que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$, determina el menor valor posible y el mayor valor posible de la siguiente expresión

$$2xy + 2yz + 7xz.$$

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

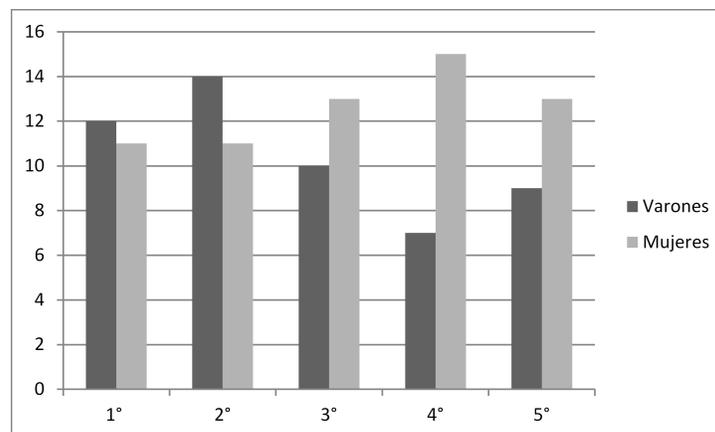
Primera Fase - Nivel 2

10 de julio de 2014

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. En el siguiente gráfico se indica la cantidad de estudiantes varones y mujeres que hay en cada grado de secundaria de un colegio, desde 1° hasta 5°. Las barras negras indican el número de varones y las barras grises indican el número de mujeres. ¿Cuál es la diferencia entre el número de varones y el de mujeres en el grado que tiene más estudiantes?



A) 1

B) 2

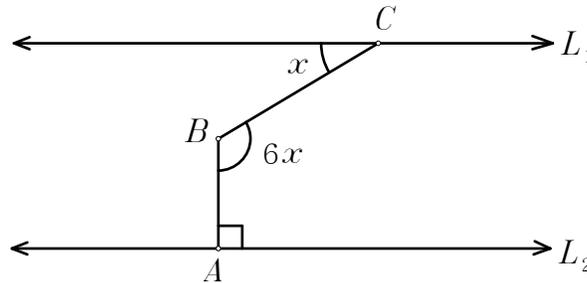
C) 3

D) 4

E) 5

Primera Fase - Nivel 2

2. En el gráfico mostrado, las rectas L_1 y L_2 son paralelas y el segmento AB es perpendicular a L_2 . Determine el valor de x .



- A) 36° B) 15° C) 30° D) 45° E) 18°
3. Si a y b son números reales no nulos tales que $25a^2 - 20ab + 4b^2 = 0$, determine el valor de $\frac{a}{b}$.
- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$
4. José y Mario trabajan en la misma oficina y tienen el mismo sueldo básico. Además, a cada uno le pagan la misma cantidad por cada hora adicional de trabajo. En el mes de marzo José trabajó 6 horas adicionales y su sueldo fue S/. 2570, mientras que Mario trabajó 11 horas adicionales y su sueldo fue S/. 2670. ¿Cuál fue el sueldo de José en el mes de abril, si en ese mes trabajó 3 horas adicionales?
- A) S/. 2510 B) S/. 2520 C) S/. 2530 D) S/. 2570 E) S/. 2550
5. En la final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática participaron estudiantes de dos categorías: 160 en la categoría Alfa y 130 en la categoría Beta. Se sabe que el número de varones en la categoría Alfa fue el doble del número de mujeres de la categoría Beta; además, el número de mujeres en la categoría Alfa fue igual al número de varones en la categoría Beta. ¿Cuántas mujeres participaron en la categoría Alfa?
- A) 30 B) 60 C) 50 D) 100 E) 110
6. ¿Cuál de los siguientes números está más cerca del número $\frac{1}{2}$ en la recta numérica?
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\left(\frac{7}{10}\right)^2$ C) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ D) $\frac{11}{21}$ E) $\left(\frac{5}{7}\right)^3$



Primera Fase - Nivel 2

7. Si n es un número entero **negativo**, determine cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas:

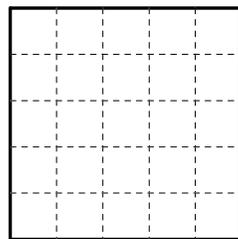
- I. $2n < n^2$.
- II. $2n < n$.
- III. $n^2 < -n$.

- A) Ninguna
- B) Solo I
- C) Solo I y II
- D) Solo I y III
- E) Todas

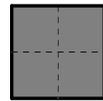
8. Al dividir el polinomio x^4 entre el polinomio $q(x)$ se obtuvo como resto el polinomio x . ¿Cuál de los siguientes polinomios puede ser $q(x)$?

- A) $x - 1$
- B) x^3
- C) $x^2 - x + 1$
- D) x
- E) $x^2 + x + 1$

9. Juanito quiere cubrir su piso de 5×5 con cerámicos cuadrados y rectangulares sin que éstos se superpongan ni salgan del borde. Si Juanito solo posee cerámicos de 2×2 y de 1×3 , como se muestra en la figura. ¿Cuántos cerámicos debe usar como mínimo?



piso de Juanito



cerámico de 2x2



cerámico de 1x3

Aclaración: El cerámico de 1×3 puede ubicarse en posición horizontal o vertical.

- A) 6
- B) 7
- C) 8
- D) 9
- E) 10

10. En cada lado de un triángulo equilátero se pintan de rojo dos puntos que dividen a ese lado en 3 segmentos de igual longitud. Si estos 6 puntos rojos se unen formando un hexágono de área 12 cm^2 , halla el área del triángulo equilátero original.

- A) 15 cm^2
- B) 16 cm^2
- C) 18 cm^2
- D) 20 cm^2
- E) 24 cm^2

11. Por ocasión del mundial del fútbol un profesor dejó el siguiente desafío a sus alumnos: Los dígitos B, R, A, S, I, L son distintos y satisfacen la ecuación

$$\overline{BRAS} + \overline{IL} = 2014,$$

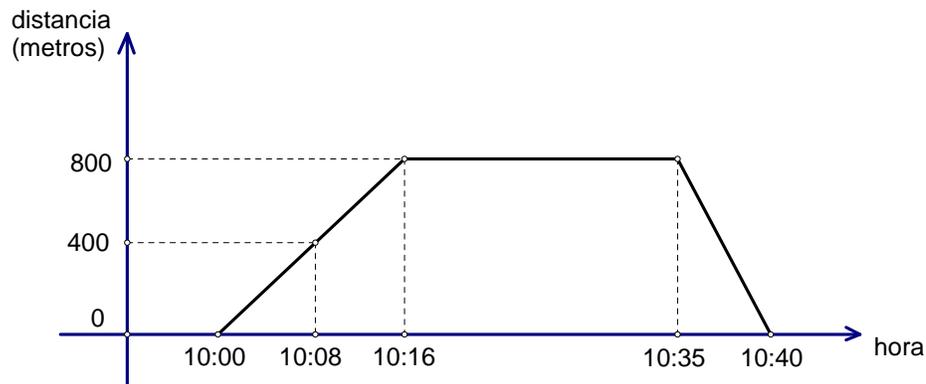
donde \overline{BRAS} es un número de 4 dígitos e \overline{IL} es un número de 2 dígitos. Si $A + S = 15$, ¿cuál es el valor de $B + R + A + S + I + L$?

- A) 32
- B) 28
- C) 38
- D) 24
- E) 34



Primera Fase - Nivel 2

12. La señora María salió de su casa a las 10:00 a.m. y caminó a la Municipalidad en línea recta, se quedó cierto tiempo en la Municipalidad y después regresó a su casa, también caminando en línea recta. El siguiente gráfico representa la **distancia que hay entre la señora María y su casa**, en función de la hora. Por ejemplo, a las 10:08 am la distancia que hubo entre la señora María y su casa fue de 400 metros. ¿Cuántos minutos se demoró en la Municipalidad?



- A) 40 B) 20 C) 19 D) 16 E) 24
13. En un salón hay 32 alumnos. Se sabe que 11 alumnos no aprobaron Historia y 19 alumnos no aprobaron Lenguaje. ¿Cuál es la diferencia entre el número de alumnos que aprobaron ambos cursos y el número de alumnos que no aprobaron ninguno de esos cursos?
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
14. Los lados de un triángulo rectángulo miden 10, n y $n + 2$. Halle la suma de todos los posibles valores de n .
- A) 32 B) 28 C) 38 D) 24 E) 30
15. En el triángulo acutángulo ABC se ha trazado la bisectriz interior BD (D es un punto del lado AC). Si los triángulos ABD y CBD son isósceles, halle la medida del menor ángulo del triángulo ABC .
- A) 15° B) 20° C) 30° D) 36° E) 45°
16. Carlos tiene seis monedas: dos de 10 céntimos, dos de 20 céntimos y dos de 50 céntimos. Él va a escoger 3 monedas para colocarlas en una fila. ¿Cuántas filas diferentes puede obtener?
- Aclaración:* Las tres monedas de 10 céntimos son idénticas entre sí y lo mismo sucede para los otros tipos de monedas.
- A) 24 B) 20 C) 32 D) 27 E) 26



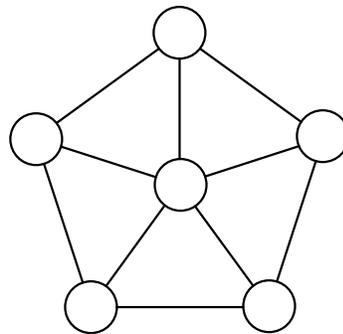
Primera Fase - Nivel 2

17. Un número es llamado *mundialista* si tiene 4 dígitos, todos sus dígitos son distintos y la suma de los dos mayores es igual a 6 veces la suma de los dos menores. Por ejemplo, el número 2014 es mundialista ya que todos sus dígitos son distintos y $4 + 2 = 6 \times (1 + 0)$. Determine cuántos de los siguientes enunciados son verdaderos:

- El 1024 es el menor número mundialista.
- El 9320 es el mayor número mundialista.
- Existe un número mundialista múltiplo de 3.
- Existe un número mundialista múltiplo de 11.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

18. En cada uno de los círculos de la siguiente figura se debe escribir un entero positivo, de tal forma que si dos círculos están unidos por un segmento entonces estos círculos contienen números diferentes.



¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de los 6 números escritos?

A) 15 B) 16 C) 12 D) 13 E) 14

19. ¿Cuántos subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ cumplen que el producto de sus elementos es un múltiplo de 8 ?

Aclaración: A modo de ejemplo, vea que el subconjunto $\{3, 4, 6\}$ cumple que el producto de sus elementos es un múltiplo de 8.

A) 160 B) 176 C) 128 D) 192 E) 144

20. Determine la suma de los dígitos del **menor** entero positivo n que tiene la siguiente propiedad: El intervalo cerrado $[n, n + 2014]$ contiene exactamente 22 cuadrados perfectos.

Aclaración: Un cuadrado perfecto es un número de la forma k^2 , donde k es un número entero.

A) 11 B) 9 C) 12 D) 10 E) 13

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

Segunda Fase - Nivel 2

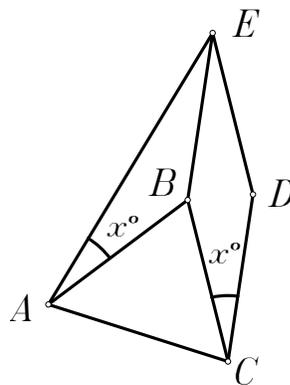
21 de agosto de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados ni tampoco **publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

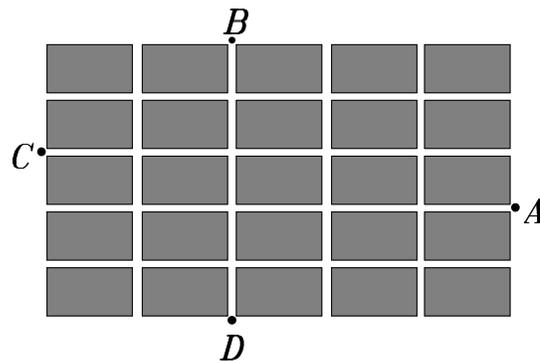
1. En la figura, ABC es un triángulo equilátero y $BCDE$ es un rombo. Además, los ángulos $\angle BAE$ y $\angle BCD$ miden x° (en grados sexagesimales). Determine el valor de x .



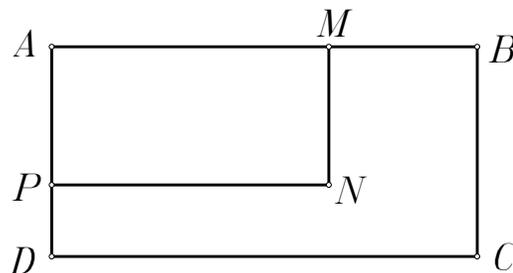
Aclaración: Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales.

Segunda Fase - Nivel 2

2. Se muestra una parte del plano de una ciudad donde los rectángulos representan las manzanas, además, todos los rectángulos son iguales. Para ir desde el cruce A hasta el cruce B el mínimo recorrido es de 390 metros; y para ir desde el cruce A hasta el cruce C el mínimo recorrido es de 430 metros. ¿De cuántos metros es el mínimo recorrido para ir desde el cruce A hasta el cruce D ?



3. ¿Cuántos elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ son divisores del número $2014^2 - 1$?
4. Sea $x_1 = \sqrt[5]{5}$, $x_2 = (\sqrt[5]{5})^{\sqrt[5]{5}}$ y en general $x_n = (x_{n-1})^{\sqrt[5]{5}}$, para cualquier $n \geq 2$. Es decir, la sucesión x_1, x_2, x_3, \dots cumple que cada término, a partir del segundo, es igual al anterior elevado al exponente $\sqrt[5]{5}$. Determine el menor entero positivo n para el cual x_n es un número entero múltiplo de 5.
5. En la figura, $ABCD$ y $AMNP$ son dos rectángulos cuyas áreas miden 30 cm^2 y 16 cm^2 , respectivamente. Calcule el área del cuadrilátero $MBDP$, en cm^2 .



6. En el plano cartesiano considere los 12 puntos que tienen coordenadas $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,0)$, $(1,3)$, $(2,0)$, $(2,3)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$. ¿De cuántas formas se puede escoger 3 de esos 12 puntos de tal forma que esos 3 puntos sean los vértices de un triángulo rectángulo?



PERÚ

Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

7. Decimos que un número de 4 dígitos \overline{abcd} es *osado* si \overline{ab} y \overline{cd} son números de 2 dígitos tales que $\overline{ab} + \overline{cd}$ es un divisor de \overline{abcd} . Por ejemplo, el número 2013 es osado, pues $20 + 13 = 33$ es un divisor de 2013. Si \overline{abcd} es un número osado, determine el mayor valor que puede tomar la expresión:

$$\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab} + \overline{cd}}.$$

Aclaración: Como \overline{ab} y \overline{cd} son números de 2 dígitos, entonces a y c son mayores que 0.

8. En una fiesta los asistentes bailan en parejas formadas por un hombre y una mujer, pero en un momento dado no es necesario que todos los asistentes estén bailando. Durante la primera hora, se observó que cada mujer bailó exactamente con 4 hombres y cada hombre bailó exactamente con 5 mujeres. Luego, se fueron 9 mujeres y en la siguiente hora se observó que cada mujer bailó con exactamente 5 hombres y cada hombre bailó con exactamente 4 mujeres. ¿Cuántos asistentes había al inicio de la fiesta?
9. Un entero positivo N es llamado *super-cuadrado* si tiene la siguiente propiedad: si sumamos todos los dígitos de N , luego a esta suma le restamos uno de los dígitos de N (elegido convenientemente) y finalmente el resultado es elevado al cuadrado, obtenemos el mismo número N . Determine el mayor super-cuadrado.
10. Sean x, y, z números reales tales que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 144, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Si el mayor valor posible de $|x| + |y| + |z|$ se expresa como $m + \sqrt{n}$, donde m y n son enteros positivos. Determine el valor de $m + n$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

Tercera Fase - Nivel 2

2 de octubre de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Santiago estaba viendo el canal del tiempo y se percató de lo siguiente: la temperatura en Pucallpa era 4° C más que en Chiclayo, la temperatura en Chiclayo era 2° C más que en Lima, la temperatura en Lima era 2° C más que en Tacna, la temperatura en Tacna era 4° C más que en Puno y la temperatura en Puno era, en grados celsius, la mitad que en Pucallpa. ¿Cuál era la temperatura en Tacna?
2. Un trapecio isósceles tiene bases paralelas de longitudes 8 cm y 20 cm, y los lados no paralelos miden 10 cm cada uno. ¿Cuál es el área de dicho trapecio, en cm^2 ?



PERÚ

Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

3. En una compañía de autos vendieron 500 autos el año pasado. Se sabe que cada mes de dicho año, a partir de febrero, vendieron un auto más que el mes anterior, excepto en uno de los meses en el que vendieron dos autos más que el mes anterior. ¿Cuántos autos vendieron en el mes de octubre de dicho año?
4. En un restaurante, cada mesa tiene exactamente n sillas. En cierto momento no hay ninguna mesa vacía y las cantidades de mesas que tienen $1, 2, 3, \dots, n$ personas son iguales a $1, 2, 3, \dots, n$, respectivamente. Determine la cantidad de mesas, sabiendo que esta cantidad es igual a la cantidad de sillas desocupadas que hay en el restaurante.

Nota: Puedes usar la siguiente igualdad $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. La profesora Gabriela va a repartir 30 caramelos entre sus 8 alumnos, de tal forma que cada alumno reciba al menos 1 caramelo y algún alumno reciba más de 4 caramelos. Además, de los 8 alumnos, al menos 4 alumnos van a recibir más de 1 caramelo. ¿Como máximo cuántos caramelos puede recibir uno de sus alumnos?
6. Si a y b son reales positivos tales que

$$a^2 + \frac{1}{b} = 7,$$

$$b^2 + \frac{1}{a} = 3,$$

determine el valor de

$$a^2b^2 + \frac{2ab + 10}{a + b}.$$

7. ¿Cuántos enteros positivos n menores que 2014 cumplen que n es igual a la suma de los dígitos de $3n + 920$?
8. Sea \mathbb{Q}^+ el conjunto de los números racionales positivos. Sea $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ una función que cumple las siguientes propiedades:
- $f(1) = 1$,
 - $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+$,
 - $(x + 1) \cdot f(x) = x \cdot f(x + 1)$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+$.

Determine el valor de $f\left(\frac{20}{14}\right)$.



PERÚ

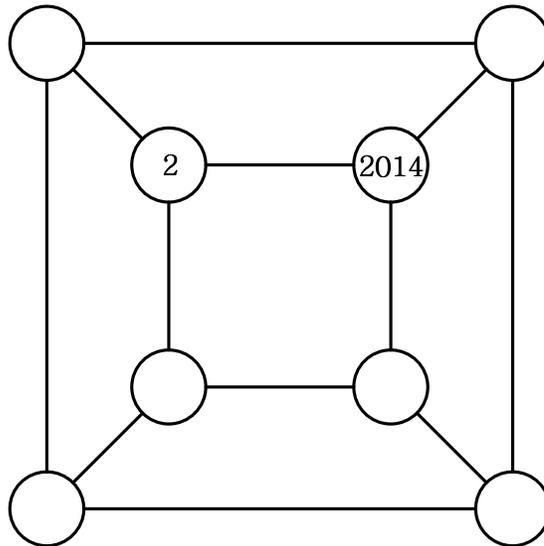
Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

9. ¿Cuántos números de 5 dígitos cumplen que cada uno de sus dígitos es mayor que 4, y además la suma de sus 5 dígitos es impar?
10. Decimos que dos enteros positivos son *amigos* si uno de esos números es múltiplo del otro. Por ejemplo, los números 9 y 3 son amigos; mientras que los números 6 y 9 no son amigos. En cada círculo de la siguiente figura tiene que escribirse un entero positivo (los números 2 y 2014 ya están escritos) de tal forma que si dos números están unidos por un segmento entonces son amigos, y si dos números no están unidos por un segmento entonces no son amigos. Determine el menor valor que puede tomar la suma de los ocho números.



GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

Cuarta Fase - Nivel 2

9 de noviembre de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
 - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
 - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
-

1. Sean a, b, m, n enteros positivos tales que:

$$\begin{aligned}m + n &= a + b \\ mn + 1 &= ab.\end{aligned}$$

- a) Pruebe que $m \neq n$.
- b) Pruebe que $a = b$.

2. Determine todos los números reales c para los cuales existen números reales no nulos x, y, z tales que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = c.$$

3. Se tiene un tablero de 5×5 . Inicialmente hay un número 1 en cada casilla del tablero. Un *movimiento* consiste en elegir un subtablero de 2×2 , borrar los números de las casillas que ocupa y escribir en su lugar los números 1, 2, 3 y 4 en algún orden. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar la suma de los 25 números del tablero después de un número finito de movimientos?



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Cuarta Fase - Nivel 2

4. Dado un cuadrilátero $ABCD$ tal que $AB = AD$, $\angle CBD + \angle ABC = \angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$ y $\angle BAD > 60^\circ$. Sea M cualquier punto del segmento AB ($M \neq A$ y $M \neq B$).
- Pruebe que existe un punto N en el segmento CD tal que $BM = DN$ y un punto X en el segmento BC tal que $MX = XN$.
 - Pruebe que la medida del ángulo $\angle XAN$ es siempre la misma sin importar cuál sea el punto M .

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

Primera Fase - Nivel 2

19 de junio de 2015

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Importante: Se informa a todos los alumnos y personal encargado que está prohibido divulgar esta prueba, especialmente por internet, hasta el día 28 de junio. A partir del 29 de junio las pruebas estarán publicadas en la página web del Ministerio de Educación.**

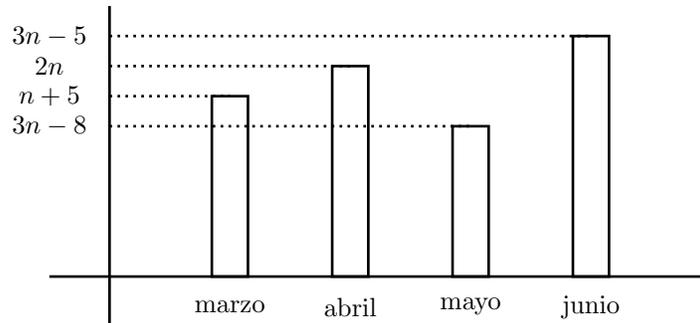
MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Si P, E, R, U son dígitos tales que $\overline{PE} \times \overline{RU} = 2015$, calcule el valor de $P + E + R + U$.
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17
2. En una carrera participan cinco amigos Aldo, Beto, Carlos, Daniel y Eduardo. Se sabe que Aldo llegó a la meta antes que Beto, Carlos llegó antes que Daniel y Daniel llegó antes que Eduardo y que Aldo. Si Beto no llegó en último lugar, ¿cuál de los amigos llegó en tercer lugar?
A) Aldo B) Beto C) Carlos D) Daniel E) Eduardo
3. Sean a, b, m, n números reales positivos tales que $a + b = 2mn$ y $m + n = 3ab$. Halle el valor de la expresión
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

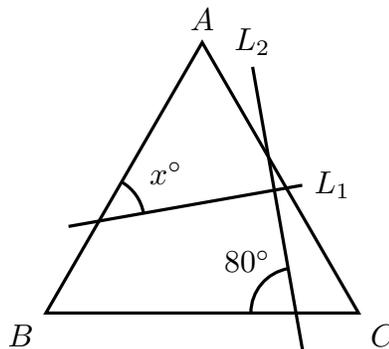
A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6
4. El número 0,2015 está entre ...
A) $\frac{1}{2}$ y 1 B) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{5}$

Primera Fase - Nivel 2

5. En el gráfico se indica la cantidad de días festivos que tiene cierta ciudad entre los meses de marzo y junio. Halle la cantidad de días festivos que tiene dicha ciudad en el mes de junio.



- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14
6. Roberto hace 5 años tenía la mitad de la edad actual que tiene Sandro, su hermano mayor. Si dentro de 5 años la edad de Sandro será un cuadrado perfecto menor que 40, determine la edad actual de Roberto.
- Aclaración:* Un cuadrado perfecto es un número de la forma k^2 , donde k es un número entero.
- A) 7 B) 15 C) 4 D) 12 E) 20
7. Un grupo de trabajadores puede realizar una obra en 100 días. Otro grupo de trabajadores puede realizar la misma obra en 150 días. Se decide contratar a ambos grupos, los cuales trabajarán la misma cantidad de días, pero por separado (en los primeros días trabajarán el primer grupo y en los últimos días, el segundo grupo). ¿Cuántos días tardarán en completar la obra?
- A) 120 B) 125 C) 130 D) 135 E) 140
8. En el siguiente gráfico, ABC es un triángulo equilátero y las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares. Determine el valor de x .



- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60



Primera Fase - Nivel 2

9. Un entero positivo es llamado *cuatrero* si cumple las siguientes condiciones a la vez:

- Cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$,
- Cualesquiera tres dígitos ubicados en posiciones seguidas son distintos entre sí.

Por ejemplo, 12314 y 23412 son cuatreros. ¿Cuántos números cuatreros de cinco dígitos (incluyendo a los del ejemplo) hay en total?

- A) 32 B) 48 C) 64 D) 72 E) 96

10. Sean m y n enteros positivos tales que $m + n = 2015$, m es múltiplo de 3 y n es múltiplo de 7. Halle el resto de dividir $3m + 7n$ entre 21.

- A) 9 B) 6 C) 2 D) 11 E) 18

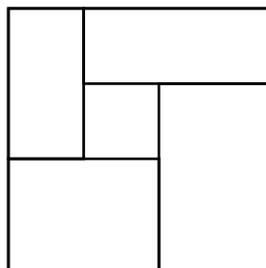
11. ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

- A) 2^{100} B) 4^{80} C) 6^{60} D) 8^{40} E) 10^{20}

12. ¿Cuál es el menor entero positivo que se puede escribir como la suma de 2, 3, 4, ó 5 números primos distintos?

- A) 28 B) 30 C) 26 D) 38 E) 20

13. Un cuadrado grande está dividido en cuatro rectángulos y un cuadrado pequeño, como muestra la figura:



Si los perímetros de los cuatro rectángulos son (en algún orden) 10 cm, 15 cm, 18 cm y 23 cm, determine el perímetro del cuadrado grande.

- A) 25 cm B) 28 cm C) 33 cm D) 38 cm E) 41 cm



Primera Fase - Nivel 2

14. Anita va a lanzar tres veces un dado sobre la mesa, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números que va a obtener sea múltiplo de 3?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

15. Determine el valor de

$$2000 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right).$$

- A) 1010 B) 1000 C) 1200 D) 505 E) 1111

16. En una reunión hay ocho mujeres. Se sabe que una de ellas es amiga de todas las demás, cinco tienen dos amigas en la reunión, una tiene una amiga en la reunión y la última tiene x amigas en la reunión. Halle la suma de todos los valores que puede tomar x .

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

17. Decimos que un número de cuatro dígitos distintos \overline{abcd} es *luminoso* si $5a + b = 5c + d$.

Por ejemplo, 2015 es luminoso ya que todos sus dígitos son distintos y $5 \times 2 + 0 = 5 \times 1 + 5$. ¿Cuál es el menor número luminoso? Dé como respuesta la suma de sus dígitos.

- A) 13 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

18. Halle el coeficiente de x^2 al expandir el producto

$$(1 + x)(1 + 3x)(1 + 5x)(1 + 7x) \cdots (1 + 19x).$$

- A) 3690 B) 4335 C) 5655 D) 6310 E) 6975

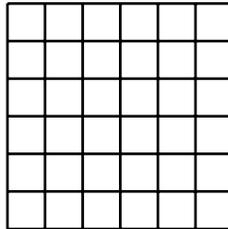
19. Sea P un punto en el interior de un triángulo ABC tal que $AP = PC$, $\angle ABP = 20^\circ$, $\angle PBC = 30^\circ$ y $\angle PCB = 70^\circ$. Determine el valor de $\angle PAB$.

- A) 50° B) 35° C) 40° D) 20° E) 30°

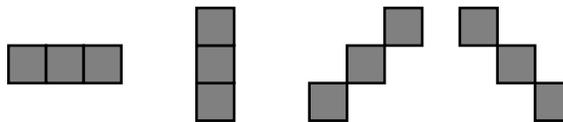


Primera Fase - Nivel 2

20. Se tiene un tablero de 6×6 , como se muestra en la figura:



Algunas casillas se van a pintar de negro de tal forma que no haya tres casillas negras consecutivas en horizontal, vertical o diagonal, es decir, no debe haber tres casillas negras dispuestas de alguna de las siguientes formas:



¿Cuántas casillas negras puede haber como máximo?

- A) 18 B) 20 C) 17 D) 19 E) 16

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

Segunda Fase - Nivel 2

17 de julio de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

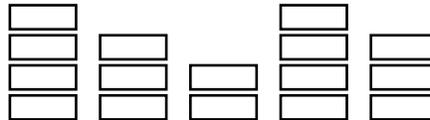
- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, pero no puedes **publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. La mamá de Ana puso sobre la mesa una jarra llena con jugo de naranja cuyo peso total era 2000 gramos. Ana tomó la tercera parte del jugo y su hermana, la tercera parte de lo que quedó. Si la jarra pesa ahora 1400 gramos, ¿cuántos gramos pesa la jarra vacía?
2. Abel, Bruno y César recogieron manzanas. César recogió 7 manzanas menos que los otros dos juntos. Abel recogió 9 manzanas menos que los otros dos juntos. Bruno recogió 11 manzanas menos que los otros dos juntos. ¿Cuántas manzanas recogió Abel?

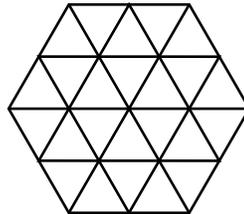
Segunda Fase - Nivel 2

3. Compré 16 regalos, de los cuales 8 son para varones y 8 son para mujeres. Mi amigo me ayudó a colocar cada regalo en una cajita y envolverlas con papel de regalo de manera que parezcan idénticas. Él los acomodó en pilas de la siguiente manera:

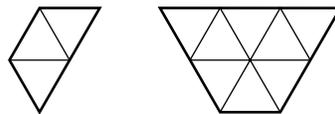


Según me dijo, cada pila contiene regalos para el mismo sexo, pero no me dijo cuáles corresponden a varones y cuáles a mujeres. ¿Cuántas cajitas debo abrir como mínimo para saber con seguridad el tipo de regalo de cada cajita?

4. Un trapecio isósceles es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos y los otros dos lados iguales pero no paralelos. Por ejemplo, en la siguiente figura:



algunos de los trapecios isósceles que aparecen son:



Determine la cantidad total de trapecios isósceles que hay en la figura inicial.

5. Sea x un número real tal que $4^x - 4^{x-1} = 24$ y sea m un número entero tal que

$$m < (2x)^x < m + 1.$$

Calcule el valor de m .

6. Dado un triángulo ABC con $\angle BAC = 105^\circ$, sea P un punto interior y D un punto del lado BC . Si $AP = PC = PD = DB$ y $AB = BP$, halla la medida del ángulo agudo que forman los segmentos AD y BP .



Segunda Fase - Nivel 2

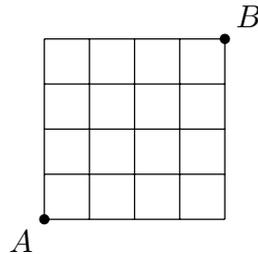
7. En la pizarra están escritos los números naturales del 1 al 32:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 30, 31, 32$$

Una *operación* consiste en borrar dos o más números de la pizarra cuya suma sea un cuadrado perfecto. ¿Cuál es la mayor cantidad de operaciones que se puede realizar para borrar todos los números de la pizarra?

Aclaración: Un cuadrado perfecto es un número de la forma k^2 , donde k es un entero positivo.

8. Al dividir el entero positivo n entre cada uno de los números 29, 39 y 59 se obtuvo tres restos distintos de cero cuya suma es n . Determine el valor de n .
9. En la siguiente figura, cada cuadradito tiene 1 cm de lado.



Un *movimiento* consiste en avanzar 1 cm a la derecha o 1cm hacia arriba. ¿De cuántas maneras se puede ir de A hacia B , usando las líneas de la cuadrícula, si no se puede avanzar en la misma dirección tres veces seguidas?

10. Sean a, b, c, d reales positivos tales que $a > b$ y además:

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 - cd + d^2 = 1$$
$$ac + bd = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Calcule el valor de $24(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

Tercera Fase - Nivel 2

15 de setiembre de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Ana, Beatriz y Cecilia se matricularon en un curso de computación que consiste de 28 clases. En cada clase asistieron al menos dos de ellas. Si Ana no asistió a 7 clases, Beatriz no asistió a 5 clases y Cecilia no asistió a 8 clases, ¿en cuántas clases estuvieron presentes las tres alumnas?

2. En cierta ciudad el control de las vacunas de un recién nacido es el siguiente: Las primeras 4 vacunas son cada mes después de nacido, las siguientes 4 vacunas son cada tres meses, las siguientes 4 vacunas son cada cinco meses, las siguientes 4 vacunas son cada siete meses, y así sucesivamente. Si Antonio, que siguió estrictamente el control de vacunas, recibió su última vacuna cuando tenía 15 años, ¿Cuántas vacunas recibió Antonio en total?

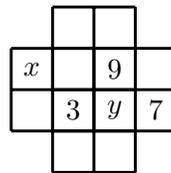


Tercera Fase - Nivel 2

3. Encuentre el mayor entero positivo N de cuatro dígitos (no necesariamente distintos), menor que 1777, que tiene la siguiente propiedad: Al multiplicar los cuatro dígitos de N obtenemos un divisor de N .

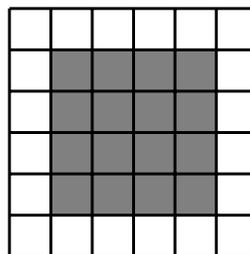
Aclaración: Tenga en cuenta que 0 no es divisor de ningún entero positivo.

4. Un caballo del ajedrez se mueve en un tablero, como el de la figura, de tal modo que pasa por cada casilla exactamente una vez. El caballo empieza su recorrido en la casilla que tiene el número 1, luego se dirige a la casilla que tiene el número 2, luego a la que tiene el número 3, y así sucesivamente, hasta que llega a la casilla que tiene el número 12. Se sabe cuáles son las casillas 3, 7 y 9, como muestra la figura. Determine el valor de $x + y$.



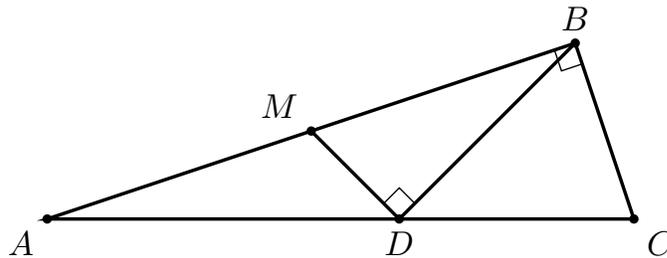
Aclaración: En el ajedrez, el movimiento de un caballo equivale a avanzar dos casillas en una dirección (horizontal o vertical) y luego una casilla en la otra dirección.

5. Al dividir el polinomio $P(x)$ entre $(x - 1)^2$ y $(x + 1)^2$ se obtienen los restos $1 + 2x$ y $1 - 2x$, respectivamente. Sea $R(x)$ el resto que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $(x^2 - 1)^2$. Calcule el valor de $R(12)$.
6. Algunas casillas de un tablero de 6×6 contienen una ficha en su interior (cada casilla puede contener como máximo una ficha), de tal modo en que cada fila y en cada columna haya exactamente dos fichas. Sea N la cantidad de fichas que hay en el cuadrado de 4×4 central, como el que está sombreado en la figura. Halle la suma de todos los valores que puede tomar N .



Tercera Fase - Nivel 2

7. Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B . Sea M el punto medio del segmento AB y D un punto de la hipotenusa AC tal que $AD = 12$ y $DC = 8$. Si $\angle BDM = 90^\circ$, calcule el área del triángulo BDM .



8. En cada casilla de un tablero de 3×3 está escrito un número real, de tal modo que se cumple la siguiente propiedad: Si escogemos tres casillas cualesquiera que estén en filas diferentes y columnas diferentes, la suma de los números que están en esas casillas es siempre negativa. Consideremos la suma de los números de cada fila y la suma de los números de cada columna, de esta forma tenemos 6 sumas, ¿como máximo cuántas de estas sumas son positivas?
9. Si el número \overline{abcdef} es múltiplo de 97 y

$$\overline{abcdef} + 1 = (\overline{ab} + 1) (\overline{cd} + 1) (\overline{ef} + 1),$$

calcule el valor de $a + b + c + d + e + f$.

10. Sea \mathcal{D} el conjunto de todos los divisores positivos del número

$$2^{16} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2.$$

\mathcal{C} es un subconjunto de \mathcal{D} que tiene la siguiente propiedad: Si a y b son elementos cualesquiera de \mathcal{C} , con $a \neq b$, se cumple que el mínimo común múltiplo de a y b no pertenece a \mathcal{C} . Determine cuántos elementos como máximo puede tener \mathcal{C} .

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

Cuarta Fase - Nivel 2

18 de octubre de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
 - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
 - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
-

1. a) Sean x, y, z números reales, demuestre la desigualdad

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}.$$

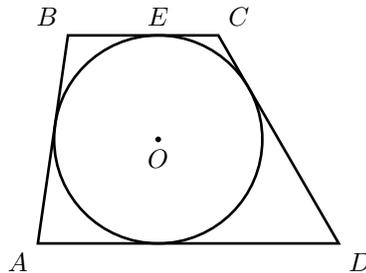
- b) Si a y b son números reales, determine el menor valor posible de la expresión

$$(a + b - 5)^2 + (a - 3)^2 + (b - 4)^2.$$

2. El producto de algunos enteros positivos (no necesariamente distintos) es una potencia de 21. A cada número se le resta 1 y se multiplica todos los números. ¿Es posible que ese nuevo producto sea una potencia de 42 ?

Cuarta Fase - Nivel 2

3. Sea $ABCD$ un trapecio de lados paralelos AD y BC , circunscrito a una circunferencia de centro O , la cual es tangente a BC en el punto E . Pruebe que si $AD = 2BC$, entonces O es el ortocentro del triángulo AED .



Aclaración: El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.

4. Sobre una mesa hay $n \geq 3$ monedas colocadas en fila. Cada moneda tiene un sello de un lado y cara en el lado opuesto. Una *operación* consiste en voltear una moneda y todas las monedas adyacentes a ella. ¿Para qué valores de n siempre es posible conseguir, luego de algunas operaciones, que todas las monedas muestren el sello, sin importar la configuración inicial de las monedas?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



Sociedad Matemática Peruana

XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

Primera Fase - Nivel 2

14 de julio de 2016

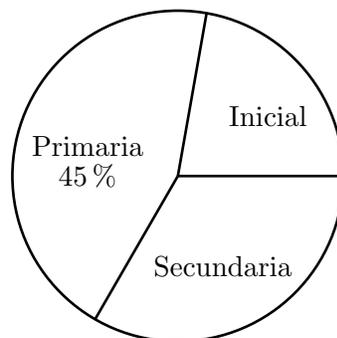
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Importante: Se informa a todos los alumnos y personal encargado que está prohibido divulgar esta prueba, especialmente por internet, hasta el día 26 de julio.**

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. En una tienda compré arroz por un valor de 7 soles y pagué con un billete de 50 soles. Me dieron de vuelto solamente monedas de 2 y 5 soles. Si recibí 4 monedas de 2 soles, ¿cuántas monedas de 5 soles recibí?

- A) 11 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2. En el siguiente gráfico circular se muestra el porcentaje de estudiantes peruanos matriculados en la modalidad de Educación Básica Regular durante el año 2015:



Si el porcentaje de estudiantes de Inicial es al porcentaje de alumnos de Secundaria como 2 es a 3, determina el porcentaje de alumnos de Secundaria.

- A) 18 % B) 22 % C) 27 % D) 30 % E) 33 %



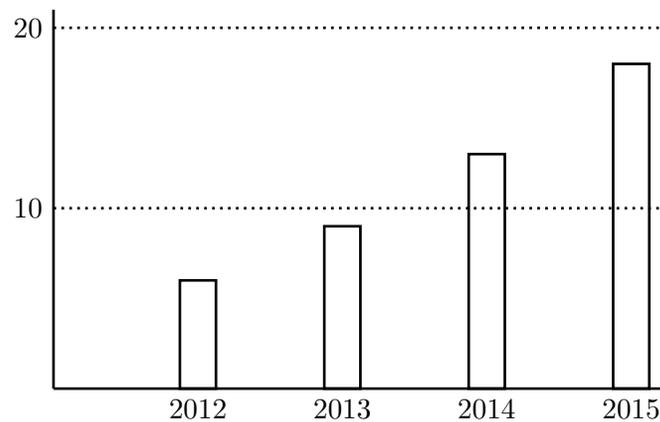
Primera Fase - Nivel 2

3. José tiene dos hermanos llamados David y Carmen. David tiene 4 años más que José y Carmen tiene 3 años menos que José. Resulta que la suma de edades de los tres hermanos es igual a la edad de su padre que tiene 43 años. ¿Cuál es la edad de José?
- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15
4. María debe comprar 15 kilos de arroz para una fiesta. La bolsa de 750 gramos cuesta S/. 3,90 y la bolsa de 5 kilos cuesta S/. 25,00 ¿Cuántos soles ahorrará María si en vez de comprar únicamente bolsas de 750 gramos compra únicamente bolsas de 5 kilos?
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
5. Se dibujan dos triángulos, uno acutángulo y el otro obtusángulo. Ambos triángulos son isósceles y cada uno tiene al menos un ángulo de 20° .
Indique la alternativa correcta:
- A) El mayor ángulo del triángulo acutángulo es 60°
B) El menor ángulo del triángulo acutángulo es 40°
C) El mayor ángulo del triángulo obtusángulo es 140°
D) El mayor ángulo del triángulo obtusángulo es 160°
E) El menor ángulo del triángulo obtusángulo es 100°
6. En un torneo de fútbol el equipo *Los Guacamayos* resultó campeón. Raúl el goleador de este equipo, anotó 11 goles en los primeros seis partidos. Si en total se jugaron 7 partidos, ¿cuántos goles anotó Raúl en el último partido para que su promedio de goles haya sido 2 ?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
7. Juana y Rosa fueron a la misma tienda a hacer sus compras. Juana compró 2 litros de leche y 1 kilo de azúcar; Rosa compró 3 litros de leche y 4 kilos de azúcar. Si Juana gastó 10 soles y Rosa gastó 22 soles, ¿cuántos soles cuesta el litro de leche en dicha tienda?
- A) 1,8 B) 2,4 C) 3,6 D) 4,8 E) 6
8. Un artesano fabricó cierta cantidad de joyas iguales. Si vende cada joya a 12 soles recaudaría menos de 250 soles, pero si vende cada joya a 13 soles recaudaría más de 250 soles. ¿Cuántas joyas fabricó el artesano?
- A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21



Primera Fase - Nivel 2

9. En el siguiente gráfico se muestra la cantidad de estudiantes de 5° de secundaria del colegio Mariscal Castilla, que han decidido estudiar Matemática, influenciados por la ONEM. Los datos corresponden a los años 2012 al 2015.



Se sabe que la cantidad de estudiantes en el 2015 fue el doble que en el 2013 y el triple que en el 2012. Además, hubo 4 estudiantes más el año 2014 que el año 2013. ¿Cuánto fue el incremento de estudiantes desde el año 2014 al año 2015?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
10. Antonio quiere comprar un electrodoméstico. En la tienda *A* dicho electrodoméstico cuesta 1200 soles y le ofrecieron un descuento del 10%. En la tienda *B* dicho electrodoméstico cuesta algo más, pero le ofrecieron un descuento del 20%. Antonio se dio cuenta que al final el precio del electrodoméstico en ambas tiendas era el mismo. ¿Cuánto costaba inicialmente el electrodoméstico en la tienda *B*?
- A) 1300 B) 1350 C) 1400 D) 1450 E) 1500
11. Sonia tiene N ovejas, donde N es un número entero mayor que 35 y menor que 65. Ella puede separar sus ovejas en grupos, con 5 ovejas en cada grupo, pero no puede hacer lo mismo con 2 ovejas en cada grupo ni con 3 ovejas en cada grupo. Determina el número de ovejas N .
- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60
12. Van a construir una pista circular alrededor de un estadio para los entrenamientos de los maratonistas. ¿Cuál debe ser el **diámetro** aproximado de la pista si un corredor debe cubrir un recorrido total de 42 km al dar 25 vueltas completas a la pista?
- Nota: Considere la aproximación $\pi = 3,14$.
- A) 311,9 m B) 267,5 m C) 475,8 m D) 623,8 m E) 535 m



Primera Fase - Nivel 2

13. Para ser miembro de un club, se tiene que pagar por única vez 150 soles por cuota de ingreso y una mensualidad de 60 soles. Sin embargo, si se paga por adelantado el costo por un tiempo determinado, el club ofrece un 10% de descuento al monto total. Ramiro quiere ser miembro del club durante n meses, para lo cual debe pagar por adelantado el monto total M . Determine M , en función de n .

- A) $M = 60n + 150$
- B) $M = 54n + 145$
- C) $M = 135n + 60$
- D) $M = 54n + 135$
- E) $M = 45n + 150$

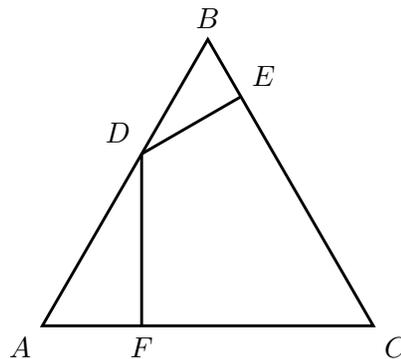
14. Un tanque que almacena gasolina está completamente lleno. Debido a un desperfecto, cada semana se evapora la quinta parte de la gasolina que hay en el tanque. Después de 3 semanas se evaporó 122 litros de gasolina. ¿Cuántos litros de gasolina había inicialmente en el tanque?

- A) 250
- B) 200
- C) 300
- D) 244
- E) 350

15. ¿Cuál es el mayor divisor de 2016 cuyo cuadrado también es divisor de 2016?

- A) 9
- B) 12
- C) 16
- D) 18
- E) 24

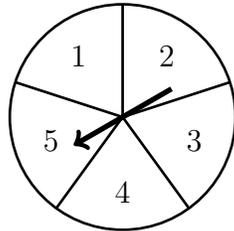
16. Sea ABC un triángulo equilátero y sea D un punto del lado AB . Sean E y F los pies de las perpendiculares trazadas desde D hacia los lados BC y AC , respectivamente. Si $CE = 8$ y $CF = 7$, determina el perímetro del triángulo ABC .



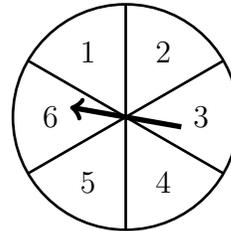
- A) 20
- B) 21
- C) 24
- D) 25
- E) 30

Primera Fase - Nivel 2

17. Un juego consiste en girar dos ruletas. La ruleta A tiene los números del 1 al 5 y la ruleta B tiene los números del 1 al 6.



ruleta A



ruleta B

Para ganar un premio el número que apunte la flecha de la ruleta A debe ser mayor que el número que apunte la flecha de la ruleta B . ¿Cuál es la probabilidad de ganar un premio?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{10}$

18. Los números reales positivos x, y, z satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$xy + x + y = 2,$$

$$yz + y + z = 5,$$

$$zx + z + x = 7.$$

Determina el valor de $x + y + z$.

- A) $\frac{7}{2}$ B) 4 C) $\frac{9}{2}$ D) 7 E) $\frac{15}{2}$

19. La maestra Jimena escribió en la pizarra los números 1, 7, 13, 19, 25, 31, y luego los alumnos hallaron todos los números primos que se pueden obtener al sumar dos o más números de la pizarra. ¿Cuántos números primos hallaron los alumnos?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7



Primera Fase - Nivel 2

20. Se tiene una fila de 14 cuadraditos enumerados de la siguiente forma:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|

Al inicio se coloca una piedra sobre uno de los cuadraditos. La piedra realiza una secuencia de movimientos de la siguiente forma: si la piedra está en el cuadradito n , en el siguiente paso se puede mover al cuadradito $n - 2$ o al cuadradito $2n$ (sin salirse de la fila). Está permitido que la piedra visite a un cuadradito más de una vez.

¿Como máximo cuántos cuadraditos diferentes puede visitar la piedra en una secuencia de movimientos si podemos escoger libremente la posición inicial de la piedra?

- A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

Segunda Fase - Nivel 2

16 de agosto de 2016

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **No puedes llevar estas hojas que contienen los enunciados, ni tampoco publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible. Las pruebas se publicarán en la página web del Ministerio de Educación, Concursos Educativos - ONEM, a partir del 19 de agosto.

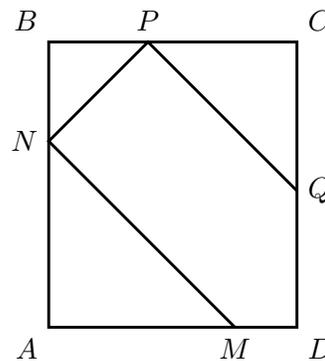
ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En los exámenes del primer bimestre Paola obtuvo 13 como nota promedio de los cursos de Historia, Inglés, Comunicación y Matemática. En el segundo bimestre ella aumentó 1 punto en Historia, 2 puntos en Inglés, 2 puntos en Comunicación y 3 puntos en Matemática, con respecto al bimestre anterior. ¿Cuál fue la nota promedio de Paola de estos cuatro cursos en el segundo bimestre?
2. Un fabricante de perfume decidió reducir en 10 ml la cantidad de perfume de cada frasco. Al hacer esto, resulta que el contenido de 25 frascos equivale al contenido de 20 frascos antes de la reducción. ¿Cuántos ml de perfume contenía cada frasco al inicio?

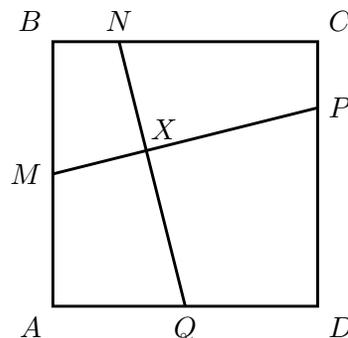


Segunda Fase - Nivel 2

3. Sean M, N, P, Q puntos de los lados DA, AB, BC, CD de un rectángulo $ABCD$, respectivamente, tales que MN, NP, PQ forman ángulos de 45° con los lados del rectángulo. Si $MD = 2$ y $BN = 4$, determine la longitud del segmento QD .



4. ¿Cuál es el menor número entero positivo, múltiplo de 3, tal que el producto de sus dígitos es 2016 ?
5. Los asientos de un auditorio están distribuidos en m filas y n columnas. Durante un seminario se observó que en cada fila había dos asientos vacíos y en cada columna había un asiento vacío. Halle el número total de asientos del auditorio si se sabe que este número es mayor que 350 y menor que 400.
6. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 8. Si $AM = AQ = 4$ cm y $BN = CP = 2$ cm, halle la diferencia de las áreas de los cuadriláteros $PDQX$ y $MBNX$, en cm^2 .





PERÚ

Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

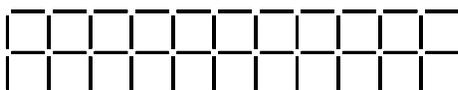
7. Sean x y z números reales tales que

$$x^2 + 5xz + z^2 = 7,$$

$$x^2z + xz^2 = 2.$$

Si $x + z \neq 2$, determina el valor de $(6xz)^2$.

8. Se tiene 57 palitos que están distribuidos de la siguiente manera



Un *movimiento* consiste en quitar 3 palitos que formen alguna de las siguientes figuras:



¿Cuál es la mayor cantidad de movimientos seguidos que se puede realizar?

9. Sean a, b, c, d números enteros positivos tales que $a > b > c > d$ y además

$$\text{mcd}(a, b) + \text{mcd}(a, c) + \text{mcd}(a, d) = 105.$$

Halla el menor valor posible de a .

Aclaración: $\text{mcd}(r, s)$ denota al máximo común divisor de los números enteros positivos r y s .

10. Determina el menor valor que puede tomar la expresión

$$\frac{ab(a + b - 28)}{(a - 1)(b - 27)},$$

donde a y b son números reales positivos tales que $a > 1$ y $b > 27$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

Tercera Fase - Nivel 2

22 de setiembre de 2016

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Alex tiene en su jardín un árbol que crece exactamente medio metro al año. La altura del árbol es igual a cinco veces la altura de Alex. Hace 12 años Alex medía 21 centímetros menos y su árbol medía la mitad de lo que él medía en ese momento. ¿Cuántos centímetros mide actualmente el árbol de Alex?
2. Héctor trabaja entregando botellas de gaseosa. En su camión todas las cajas están llenas de botellas (12 en cada caja) y aparte hay menos de 12 botellas sueltas. Si la cantidad de botellas más la cantidad de cajas es 216. ¿Cuántas cajas hay en el camión de Héctor?
3. Definimos los números $a = \left(1 + \frac{1}{2015}\right)^{2015}$ y $b = \left(1 + \frac{1}{2015}\right)^{2016}$. Calcule el valor de $\frac{a^b}{b^a}$.



PERÚ

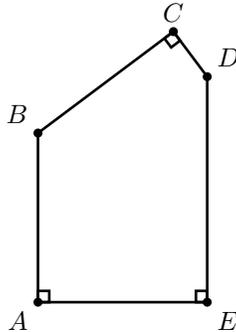
Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

4. Sea $ABCDE$ un pentágono que tiene ángulos rectos en los vértices A , C y E , tal que $AB = 18$ cm, $CD = 6$ cm y $DE = 24$ cm. Calcule el perímetro del pentágono $ABCDE$ (en cm) si su área es 480 cm².



5. Favio tiene tres bolsas de caramelos. Una bolsa tiene tres caramelos amarillos y tres caramelos rojos, otra bolsa tiene 3 caramelos rojos y 3 caramelos verdes y la última bolsa tiene 3 caramelos verdes y 3 caramelos amarillos. Favio va a sacar, al azar, un caramelo de cada bolsa. La probabilidad de que Favio saque tres caramelos de colores distintos es del $n\%$. Determine el valor de n .
6. Un número entero positivo de cuatro dígitos puede expresarse como el producto $\overline{ab} \times \overline{da}$, donde a, b, d son dígitos no nulos, distintos entre sí, tales que $\overline{da} > \overline{ab}$. Halle el **menor** valor posible de $\overline{da} - \overline{ab}$.
7. Roberto tiene 101 monedas, ubicadas en una fila. Cada moneda es de 10, 20 ó 50 céntimos. Se sabe que no hay un grupo de monedas consecutivas cuya suma sea 60 céntimos. ¿Cuál es la menor cantidad de monedas de 50 céntimos que puede tener Roberto?
8. Sean a y b enteros positivos tales que $a^2 + b^2 = 300a$. Determine la **suma** de todos los valores distintos que puede tomar a .



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

9. Sea ABC un triángulo equilátero de lado 48 y Q un punto del lado AB tal que $BQ = 26$. Si P es un punto en el interior del triángulo ABC tal que $PA^2 + PC^2 = PB^2$, determine el **menor** valor entero que puede tomar la longitud del segmento PQ .
10. Joaquín está de viaje en un país extraño donde hay billetes de valor n para cada entero positivo n menor o igual que 50, es decir, hay billetes de valor 1, de valor 2, ..., de valor 50. Joaquín tiene exactamente 7 billetes de valores $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 < n_7$, y con ellos puede pagar cualquier objeto cuyo valor sea un número entre 1 y 60, inclusive, sin recibir vuelto. Determine el **menor** valor posible de n_7 .

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

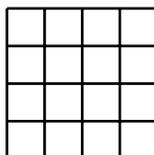
Cuarta Fase - Nivel 2

23 de octubre de 2016

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

-
1. Un conjunto \mathcal{C} está formado por siete enteros positivos diferentes. Se sabe que exactamente tres elementos de \mathcal{C} son múltiplos de 3 y exactamente cuatro de elementos de \mathcal{C} son múltiplos de 4. Calcule el menor valor posible de la suma de los siete elementos de \mathcal{C} .
 2. Se tiene el siguiente tablero de 4×4 , formado por cuadrados de lado 1;



Algunos de los segmentos de longitud 1 (que son lados de los cuadrados) se pintan de rojo y dentro de cada cuadrado se escribe la cantidad de lados rojos que tiene ese cuadrado. Si los números que aparecieron en el tablero son, en algún orden: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 y 3. Determine la menor cantidad de segmentos rojos de longitud 1 que puede haber en el tablero.



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Cuarta Fase - Nivel 2

3. Sea P un punto interior de un triángulo ABC tal que $\angle PAB = \angle PCA = \angle PBC - 60^\circ$ y $PC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Halle la medida del ángulo $\angle PAB$.
4. Encuentre el mayor entero positivo n para el cual existe un polinomio $P(x)$ de coeficientes reales, de grado 100 y n números reales a_1, a_2, \dots, a_n en progresión aritmética de razón diferente de cero, tal que los números $P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)$ formen una progresión geométrica (en ese orden).

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2017)

Primera Fase - Nivel 2

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega tu hoja de respuestas y el cuadernillo de preguntas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - **Importante: Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de esta prueba por ningún medio. La pruebas serán colgadas en la web de la ONEM.**
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Antes de una pelea de box, los organizadores pactaron repartir cierto monto de la siguiente forma: la quinta parte para el perdedor y el resto para el ganador. Si el perdedor obtuvo 1000 soles, ¿cuánto obtuvo el ganador?
A) 4000 soles B) 5000 soles C) 6000 soles D) 3000 soles E) 4500 soles
2. Un sastre tiene que hacer cuatro pantalones iguales el día de hoy. Él empezó a trabajar a las 7:30 am y terminó el primer pantalón a las 9:00 am. ¿A qué hora terminará los cuatro pantalones?
A) 12:30 pm B) 1:30 pm C) 2:00 pm D) 1:00 pm E) 1:15 pm
3. Juan y Alberto tienen que recaudar cada uno 300 soles para su viaje de promoción. En cierto momento se dio la siguiente conversación:
 - Juan dijo: “Me falta recaudar el 60% del total.”
 - Alberto respondió: “Entonces yo he recaudado el doble que tú”¿Cuánto le falta recaudar a Alberto?
A) 120 soles B) 90 soles C) 45 soles D) 72 soles E) 60 soles



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 2

4. Martha quiere determinar qué porcentaje de la superficie de un plato circular ocupa el huevo frito que ella se preparó para el desayuno. Si el radio del plato es 14 cm, y se asume que la forma del huevo frito corresponde a un círculo de radio igual a 0,8 veces el radio del plato, calcule el porcentaje requerido.

- A) 36 % B) 50 % C) 14 % D) 64 % E) 72 %

5. Hace 6 años la edad de Adriana era mayor que $\frac{1}{2}$ de su edad actual y dentro de 7 años la edad de Adriana será mayor que $\frac{3}{2}$ de su edad actual. ¿Dentro de cuántos años Adriana tendrá 18 años?

- A) 6 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

6. Halle la suma de todos los números en el siguiente arreglo:

| | | | |
|----|----|-----|-----|
| 1 | 2 | 4 | 8 |
| 3 | 6 | 12 | 24 |
| 9 | 18 | 36 | 72 |
| 27 | 54 | 108 | 216 |

Expresar el resultado mediante una multiplicación.

- A) 15×40 B) 40×21 C) 10×45 D) 21×35 E) 16×35

7. En un bus hay 50 asientos y uno lo ocupa el chofer. En los otros asientos están viajando alumnos de dos colegios A y B , aunque hay algunos asientos vacíos. La tercera parte de los alumnos del colegio A está durmiendo y la quinta parte está leyendo. La tercera parte de los alumnos del colegio B está leyendo y la octava parte está durmiendo. ¿Cuántos asientos vacíos hay?

- A) 12 B) 10 C) 11 D) 13 E) 17

8. Un carpintero hizo dos prismas de madera. Las bases del primer prisma son triángulos equiláteros de 8 cm de lado y sus caras laterales son cuadrados. Las bases del segundo prisma son hexágonos regulares de 8 cm de lado y sus caras laterales también son cuadrados. Por lo tanto, el volumen del primer prisma es al volumen del segundo prisma como ...

- A) 1 es a 3 B) 2 es a 3 C) 1 es a 6 D) 1 es a 4 E) 2 es a 9



PERÚ

Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 2

9. En una ciudad, cada número telefónico es de la forma \overline{abcde} (es decir, tiene 5 dígitos) y para que sea considerado válido se debe cumplir que $3a + b + 3c + d + 3e$ es múltiplo de 10. Por ejemplo, 23289 es un número válido porque $3 \times 2 + 1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 8 + 3 \times 9 = 50$ es múltiplo de 10. Por otro lado, 11111 no es un número válido porque $3 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 1 = 11$ no es múltiplo de 10.

Esta forma de asignar los números telefónicos tiene varios beneficios, uno de ellos es que si se intercambian de lugar dos dígitos adyacentes casi siempre se puede deducir cuál era el número inicial, sin tener la información de cuáles fueron los dígitos intercambiados. Por ejemplo, mientras Andrea dictaba su número telefónico a una amiga, por error intercambió dos dígitos adyacentes y su amiga escribió 24765. ¿Cuál es el número telefónico de Andrea?

- A) No se puede determinar B) 42765 C) 27465 D) 24675 E) 24756

10. El *Reglamento municipal de edificaciones* de cierta ciudad consta de tres normas:

- El primer piso de una edificación debe tener como mínimo 3 metros de altura.
- Cualquier otro piso superior al primero debe tener como mínimo 2,6 metros de altura.
- La edificación debe tener como máximo 25 metros de altura.

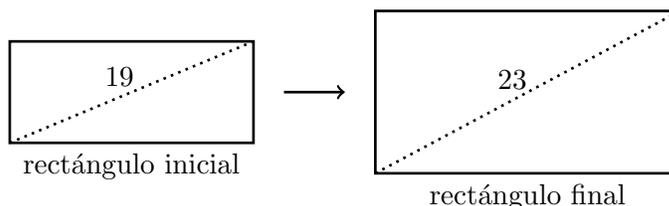
¿Cuántos pisos como máximo puede tener una edificación en dicha ciudad?

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

11. Felipe dibujó en su cuaderno un cuadrilátero y midió con un transportador sus ángulos interiores. Resultó que las medidas de los ángulos están en progresión aritmética y que dos de ellos son 45° y 105° . ¿Cuál es la medida del mayor ángulo interior del cuadrilátero?

- A) 120° B) 145° C) 110° D) 105° E) 135°

12. Pedro dibujó un rectángulo cuya diagonal mide 19 cm. Si la base y altura del rectángulo de Pedro aumentan en 3 cm, entonces la diagonal aumenta en 4 cm. Calcule el perímetro del rectángulo inicial.



- A) 38 cm B) 52 cm C) 50 cm D) 54 cm E) 48 cm



Primera Fase - Nivel 2

13. La *mediana* de una cantidad par de números se determina de la siguiente forma: se ordena los números de menor a mayor, y la mediana se define como la media de los números que aparecen en las posiciones centrales. Por ejemplo, la mediana de los números 6, 2, 5, 2, 1, 4 es 3 porque al ordenar dichos números de menor a mayor obtenemos 1, 2, 2, 4, 5, 6 y la media de los números que aparecen en las posiciones centrales es $\frac{2+4}{2} = 3$.

Un niño hizo una encuesta a 6 personas haciéndoles la siguiente pregunta: ¿Cuántas personas viven en tu casa? Las respuestas que obtuvo fueron las siguientes:

$$3, 3, 7, 9, n, 3.$$

Luego, el niño calculó la mediana de los 6 números. ¿Cuál de las siguientes alternativas **no** es un posible valor de la mediana?

- A) 3,5 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 5,5
14. Una zapatería usa la siguiente fórmula para determinar la longitud L de un zapato según la talla t :

$$L(t) = at + b,$$

donde a y b son constantes. Se sabe que la talla 34 corresponde a una longitud de 21,5 cm y la talla 44 corresponde a una longitud de 27,5 cm, es decir, se cumple que $L(34) = 21,5$ y $L(44) = 27,5$, respectivamente. ¿Qué longitud corresponde a la talla 38?

- A) 23,7 cm B) 24,2 cm C) 25,1 cm D) 24,3 cm E) 23,9 cm
15. Luego de una encuesta a los alumnos de educación secundaria de un colegio acerca de su deporte favorito se obtuvo la siguiente información:

| | Número de alumnos | Porcentaje |
|---------|-------------------|------------|
| Fútbol | 100 | * |
| Vóley | 60 | * |
| Básquet | * | 20 % |
| Tenis | * | 16 % |

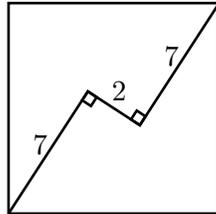
Los asteriscos denotan información oculta. ¿Para cuántos alumnos su deporte favorito es el básquet?

- A) 50 B) 40 C) 65 D) 62 E) 55



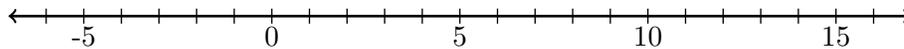
Primera Fase - Nivel 2

16. En la figura se muestra tres segmentos dentro de un cuadrado. El segundo segmento tiene longitud 2 cm y es perpendicular a los otros dos segmentos que tienen longitud 7 cm.

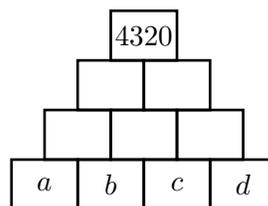


¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?

- A) 11 cm B) 10 cm C) 14 cm D) $7\sqrt{2}$ cm E) $6\sqrt{2}$ cm
17. Una rana se encuentra en el punto 0 de la recta numérica, y planea dar saltos de la siguiente manera: en su primer salto, quiere saltar una unidad en cualquier dirección (izquierda o derecha), en su segundo salto quiere saltar dos unidades en cualquier dirección, en su tercer salto quiere saltar tres unidades en cualquier dirección, y así sucesivamente. ¿Cuántos saltos, como mínimo, debe realizar la rana para llegar al punto 11?



- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
18. En cada casilla del siguiente tablero se va a escribir un número entero positivo (algunas casillas ya tienen escrito un número) de tal forma que cada número que no está en la fila inferior sea igual al producto de los dos números que están debajo de él. Si los 10 números que se van a usar son distintos entre sí, determine el mayor valor posible de $b + 2d$.

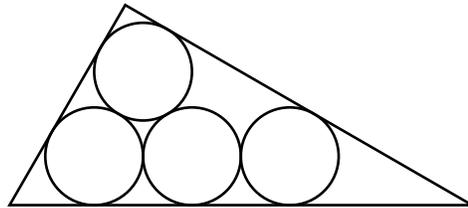


- A) 11 B) 13 C) 15 D) 12 E) 10

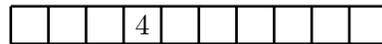


Primera Fase - Nivel 2

19. Cada una de las cuatro circunferencias mostradas tiene radio 1 cm y es tangente a uno o dos lados del triángulo. Además, tres circunferencias son tangentes entre sí y una de las circunferencias es tangente a las otras tres. Calcule el área del triángulo.



- A) $12\sqrt{3}$ cm² B) $9 + 6\sqrt{3}$ cm² C) 18 cm² D) $15 + 3\sqrt{3}$ cm² E) $12 + 9\sqrt{3}$ cm²
20. Determine de cuántas formas se pueden ordenar los números 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 en las casillas de la siguiente fila, de tal forma que la suma de cualesquiera dos números adyacentes sea mayor o igual que 11.



- A) 12 B) 6 C) 3 D) 2 E) 1

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2017)

Segunda Fase - Nivel 2

29 de agosto de 2017

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas y verifica que se ponga la hora en la que estás entregando. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- **No puedes llevar estas hojas que contienen los enunciados.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Cierta juguete cuesta 80 soles. Se sabe que por fiestas de fin de año, el precio subirá 25% y una vez que éstas hayan pasado, el precio baja 20%. ¿Cuál es el precio final de dicho juguete (en soles)?
2. Sea $ABCD$ un cuadrado cuya diagonal AC mide x cm. Si el área de $ABCD$ es $(x + 12)$ cm^2 , calcule el valor de x .
3. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ y $f(3) = 1$. Calcule el valor de c^2 .



PERÚ

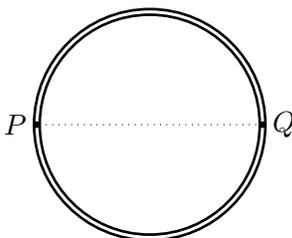
Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

4. Inés y Tania están trotando a lo largo de una pista circular que tiene una longitud de 400 metros. Las velocidades de Inés y Tania son 110 metros por minuto y 90 metros por minuto, respectivamente. Si Inés y Tania partieron del mismo punto P y ambas están recorriendo la pista en sentido horario, ¿dentro de cuántos minutos ocurrirá por primera vez que ambas estén en el punto Q (diametralmente opuesto a P)?



5. Sean a y b dígitos mayores que 0 tales que $\frac{a+b}{15} = 0, b\widehat{a}$. Calcule el producto ab .
Nota: Tenga en cuenta que $0, b\widehat{a} = 0, baaaa\dots$, es decir, el dígito a se repite infinitas veces.
6. Un tablero de 7×7 puede ser cubierto completamente con m fichas de 2×2 y n fichas de 1×3 , sin que las fichas se superpongan. Determine el mayor valor posible de m .
Nota: Las fichas se pueden girar.
7. Sea R_1 la región interior al paralelogramo que tiene vértices $(1, 0)$, $(0, 6)$, $(4, 9)$ y $(5, 3)$. Sea R_2 la región que se obtiene al trasladar R_1 tres unidades a la derecha. Calcule el área de la intersección de las regiones R_1 y R_2 .
8. Decimos que dos enteros positivos son *amigos* si su diferencia es un divisor de su suma. Por ejemplo, los números 3 y 5 son amigos porque 2 es un divisor de 8.
Se tiene cinco enteros positivos distintos tales que cualesquiera dos de ellos son amigos. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de esos cinco números?



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

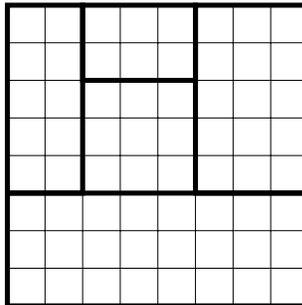
9. Sea M el mayor número real tal que la desigualdad:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + M(a - b)^2$$

se cumple para todos los números reales a , b y c . Calcule el valor de $120M$.

10. Determine de cuántas formas se puede dividir un tablero de 8×8 en 5 rectángulos (formados por uno o más cuadraditos del tablero) de tal forma que haya exactamente un rectángulo que tenga sus 4 lados completamente dentro del tablero. Tenga en cuenta que un cuadrado también es un rectángulo.

Ejemplo: A continuación se muestra una forma de dividir del tablero que cumple la condición requerida.



GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2017)

Tercera Fase - Nivel 2

29 de setiembre de 2017

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas (120 minutos) para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas y asegúrate de que hayas guardado tus respuestas en el sistema. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega, registrada en el sistema.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Al inicio del día un tanque tenía 8000 litros de agua. Con el 60 % del contenido del tanque se pudo regar el 75 % de la superficie de un campo de cultivo. Luego de haber regado toda la superficie del campo de cultivo, ¿cuántos litros de agua quedan en el tanque?

2. ¿Cuál es el menor entero positivo tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es 23 ?



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

3. Sea k un número real positivo. La gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - kx + 16$ intersecta a los ejes cartesianos en los puntos A , B y C . Determine el valor de k , si se sabe que el área del triángulo ABC es 16.

Aclaración: los ejes cartesianos también son conocidos como eje x (horizontal) y eje y (vertical).

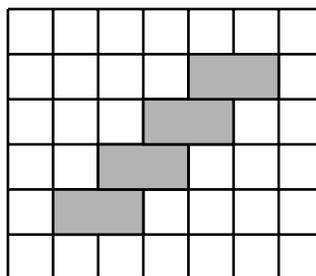
4. En una bolsa negra hay 9 tarjetas que tienen los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. ¿Cuántas tarjetas como mínimo hay que sacar al azar y sin ver, para tener la seguridad de que el producto de los números de las tarjetas que sacamos es múltiplo de 6 ?
5. En un cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, $AB = BC$ y $AD = BC + CD$. Calcule la medida del ángulo $\angle ACD$.

6. Halle el menor valor posible de la expresión

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x + \frac{81}{x}\right),$$

donde x es un número real positivo.

7. Un *dominó* es un rectángulo de 1×2 o de 2×1 . En un tablero de 6×7 se han ubicado 4 dominós (de color gris), como se muestra en la figura. ¿Como máximo cuántos dominós adicionales se pueden ubicar, si los dominós no se pueden superponer ni salir del tablero?





PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

8. Halle el menor entero positivo N para el cual existen al menos dos pares ordenados (x, y) de números enteros que satisfacen la condición $1 < x \leq y$, y además

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = N.$$

9. Consideremos el conjunto de todos los cuadriláteros convexos $ABCD$ que satisfacen la condición $AB + BC + CD = 20$. Se sabe que en ese conjunto hay al menos un cuadrilátero de área máxima y dicha área vale S . Encuentre el número entero m para el cual se cumple que $m \leq S < m + 1$.
10. Trescientos estudiantes participaron en una olimpiada matemática. Cualesquiera dos estudiantes se conocen o no se conocen, y además, no hay tres estudiantes que se conozcan entre sí. Cada estudiante conoce como máximo a otros n estudiantes y para cada m (con $1 \leq m \leq n$) existe al menos un estudiante que conoce a exactamente otros m estudiantes. Determine el mayor valor de n para el cual esto es posible.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2017)

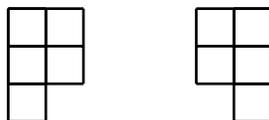
Cuarta Fase - Nivel 2

12 de noviembre de 2017

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

1. Un P -pentaminó es una ficha formada por 5 casillas de alguna de las siguientes formas:



Un tablero de 6×6 fue cubierto con siete P -pentaminós y quedó una casilla vacía en una de las diagonales. ¿En cuántas posiciones distintas puede quedar dicha casilla vacía?

Aclaración: Está permitido rotar las fichas.

2. Sea \mathbb{N}_0 el conjunto de los enteros no negativos, es decir $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Sea $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ una función tal que

$$f(f(x)) + f(xf(y)) = yf(x) + x,$$

para todo los enteros no negativos x, y .

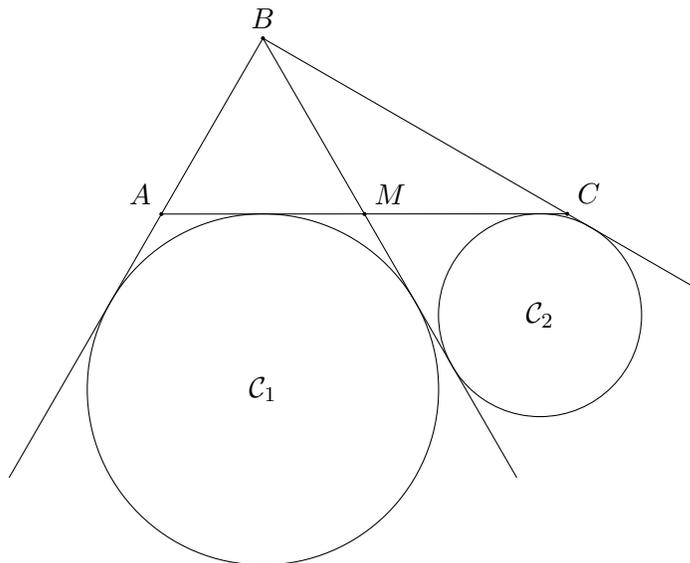
- a) Pruebe que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
- b) Pruebe que $f(2017)$ es un número primo.

Aclaración: 2017 es un número primo.



Cuarta Fase - Nivel 2

3. En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , M es el punto medio del lado AC . Sea \mathcal{C}_1 la circunferencia exinscrita del triángulo ABM , opuesta al vértice B . Sea \mathcal{C}_2 la circunferencia exinscrita del triángulo MBC , opuesta al vértice B . Pruebe que existe una recta perpendicular a AC que es tangente a \mathcal{C}_1 y a \mathcal{C}_2 .



4. Christian tiene n tarjetas y n cajas dispuestas en fila. En cada tarjeta Christian escribió un número entero entre 2 y 1000000 (los números no necesariamente son diferentes), luego, colocó una tarjeta en cada caja, sin que Raúl vea los números. Hay dos tipos de operaciones que puede hacer Raúl:
- Raúl escoge un número primo p , luego, Christian señala con el dedo índice las cajas que contienen un número múltiplo de p y mayor que p .
 - Raúl escoge un número entero $d > 2$ y selecciona un subconjunto de las n cajas, luego, Christian le dice a Raúl en cuántas de estas cajas seleccionadas hay un número que posee exactamente d divisores positivos.

¿Es cierto que Raúl siempre puede determinar con seguridad cuántos de los n números de las tarjetas son primos, realizando menos de 20 operaciones?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

Primera Fase - Nivel 2

11 de julio de 2018

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- **Entrega tu hoja de respuestas y el cuadernillo de preguntas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.**
- Escribe tus datos (nombre, grado, etc) y la hora de entrega con lapicero. Te recomendamos que marques tus respuestas con lápiz.
- **Importante: Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de esta prueba por ningún medio.**

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. El resultado final de un partido de fútbol fue 3:2. ¿Cuál de los siguientes resultados **no** pudo haber sido el resultado al final del primer tiempo?
 A) 3:0 B) 0:2 C) 2:1 D) 2:2 E) 2:3
2. En la carrera en la que Usain Bolt consiguió el record mundial de los 100 metros planos, Tyson Gay quedó en segundo lugar y Asafa Powell, en tercero. Usain Bolt llegó a la meta 13 centésimas de segundo antes que Tyson Gay y éste también llegó 13 centésimas de segundo antes que Asafa Powell. Si la marca de Asafa Powell fue 9,84 s, ¿cuál fue la marca de Usain Bolt?
 A) 9,64 s B) 10,10 s C) 9,38 s D) 9,58 s E) 9,62 s
3. El sistema de calificación de un examen de admisión, que consta de 50 preguntas, es el siguiente:

| | | |
|--------------------|----------------------|-----------|
| Respuesta Correcta | Respuesta Incorrecta | En blanco |
| +5 puntos | -1 punto | 0 puntos |

Si un alumno tuvo x respuestas incorrectas y dejó en blanco 7 preguntas, la expresión de su puntaje fue:

- A) $215 - 6x$ B) $250 - 12x$ C) $250 - 7x$ D) $205 - 14x$ E) $215 - 12x$



PERÚ

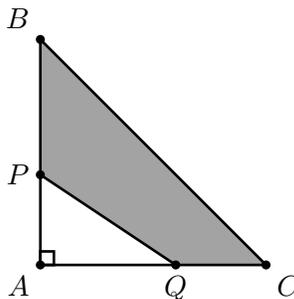
Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 2

4. ¿Cuántas caras (incluyendo las bases) tiene un prisma que tiene exactamente 21 aristas?
A) 7 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12
5. Se sabe que seis manzanas cuestan igual que siete naranjas. Complete la siguiente frase para que sea verdadera: “Siete manzanas cuestan _____ que ocho naranjas”.
A) el doble B) la mitad C) más D) menos E) igual
6. En una reunión familiar, han servido una fuente de alfajores. Se sabe que: si cada uno come 4 alfajores, sobrarían 8; pero si cada uno quisiera comer 5 alfajores, faltarían 4. ¿Cuántas personas se han reunido?
A) 24 B) 32 C) 12 D) 16 E) 10
7. Cierta día en la ciudad de Huánuco llovió desde las 1:10 p.m. hasta las 3:34 p.m. ¿Qué porcentaje del día llovió?
A) 8% B) 25% C) 15% D) 10% E) 20%
8. ¿Cuál de los siguientes intervalos cerrados contiene la mayor cantidad de números enteros?
Aclaración: $[a, b]$ denota al intervalo cerrado cuyos extremos son a y b .
A) $[2, 5]$ B) $[-1, \pi]$ C) $[-1, 2]$ D) $[0, \sqrt{5}]$ E) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
9. Amelia dibujó un triángulo rectángulo ABC , recto en A . Luego, ubicó los puntos P y Q , como se muestra en la figura, de tal forma que $AP = QC = 2$ y $AQ = BP = 3$.



- ¿Qué porcentaje del área del triángulo ABC representa el área de la región sombreada?
A) 76% B) 78% C) 58% D) 62% E) 38%



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 2

10. Ernesto tiene 5 datos: 11, 2, 1, 6 y 7. Él escogió uno de los números y lo duplicó, al hacer esto consiguió que la mediana de los cinco datos cambie. ¿Qué número escogió Ernesto?

- A) 11 B) 2 C) 1 D) 6 E) 7

11. Sofía escribió un número de dos dígitos y luego insertó un dígito d en la parte central, con lo cual obtuvo un número de tres dígitos. Si al hacer esto el número original aumentó en 340, determine el valor de d .

- A) 9 B) 3 C) 7 D) 4 E) 0

12. Los puntos $(2; -2)$ y $(5; 7)$ pertenecen a una recta \mathcal{L} en el plano cartesiano. ¿Cuáles de los siguientes puntos también pertenecen a la recta \mathcal{L} ?

$P(-1; -10)$ $Q(7; 13)$ $R(3; 0)$ $S(0; -8)$

- A) P, Q y R B) Q, R y S C) P y R D) Q y S E) R y S

13. Los gastos de Josué durante el mes de mayo fueron los siguientes:

| | Gasto (S/) |
|---------------------|------------|
| Alimentación | 650 |
| Transporte | 100 |
| Préstamo bancario | 560 |
| Luz | 60 |
| Agua | 40 |
| Teléfono e internet | 90 |

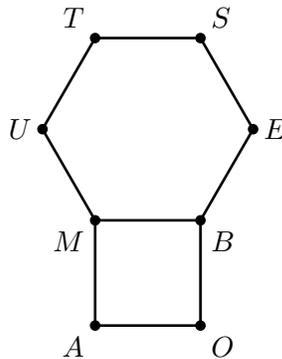
En el mes de junio sus gastos se modificaron de la siguiente forma (con respecto al mes anterior): alimentación se incrementó en 10%; transporte, luz y agua se incrementaron en 5%; y los otros gastos no se modificaron. ¿En qué porcentaje se incrementó el gasto total de Josué?

- A) 7,5 % B) 3,75 % C) 6,5 % D) 5 % E) 8 %



Primera Fase - Nivel 2

14. En la siguiente figura se muestra un cuadrado $AMBO$ y un hexágono regular $TUMBES$. Determine el valor de n para el cual los puntos U, M, A (en ese orden) son vértices consecutivos de un polígono regular de n lados.

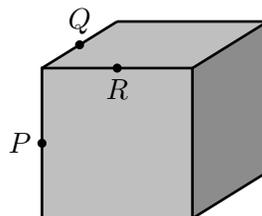


- A) 10 B) 12 C) 20 D) 16 E) 24

15. Un número natural N es llamado *cuasi-divisible* si al sumar 1 a cualquiera de sus dígitos obtenemos un divisor de N . Por ejemplo, 102 es cuasi-divisible porque $1 + 1$, $0 + 1$ y $2 + 1$ son divisores de 102. Determine el mayor número cuasi-divisible que consta de cuatro dígitos distintos y dé como respuesta la suma de los cuadrados de sus dígitos.

- A) 146 B) 98 C) 155 D) 243 E) 162

16. En la siguiente figura se muestra un cubo de madera, donde P, Q y R son puntos medios de las aristas correspondientes. Un plano que pasa por los puntos P, Q y R divide al cubo de madera en dos partes (una de las cuales es un tetraedro). ¿En qué relación están los volúmenes de esas dos partes?



- A) de 1 a 15 B) de 2 a 25 C) de 1 a 47 D) de 1 a 24 E) de 1 a 53

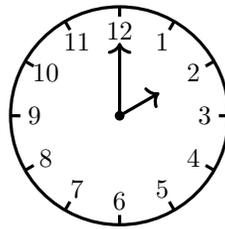


Primera Fase - Nivel 2

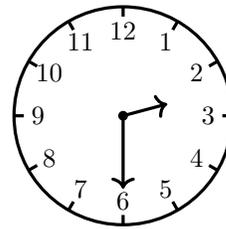
17. En la pizarra están escritos 9 números naturales que forman una progresión aritmética. Se sabe que exactamente N de esos números son pares. ¿Cuál de los siguientes números **no** es un posible valor de N ?

- A) 0 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

18. ¿A qué hora entre las 2:00 p.m. y las 2:30 p.m. se cumple que el ángulo que forman el horario y el minutero de un reloj es exactamente 94° ?



2:00 p.m.



2:30 p.m.

- A) 2:26 p.m. B) 2:29 p.m. C) 2:28 p.m. D) 2:21 p.m. E) 2:25 p.m.

19. Luis escogió algunos elementos del conjunto $\{2, 3, 4, 5, 8, 12, 15, 27\}$ y Edinson se quedó con los números que sobraron. Se sabe que el producto de los números de Luis es igual al producto de los números de Edinson y, además, Luis **no** escogió el número 8. Calcule la suma de los números de Edinson.

- A) 34 B) 35 C) 38 D) 39 E) 42

20. Franco escribió un número que consta de 10 dígitos distintos. Luego, subrayó cada dígito que es igual a la suma de sus **dos** dígitos vecinos (el de la izquierda y el de la derecha). ¿Cuántos dígitos como máximo puede subrayar Franco?

- A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

Segunda Fase - Nivel 2

28 de agosto de 2018

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas y verifica que se ponga la hora en la que estás entregando. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- **No puedes llevar estas hojas que contienen los enunciados.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. La operación A consiste en restar 10 y la operación B consiste en multiplicar por $\frac{4}{5}$. A un número se le aplicó la operación A y luego la operación B, de esta forma el resultado final fue 24. ¿Cuál hubiese sido el resultado final si las operaciones se realizan en el otro orden (primero B y luego A)?
2. Según los datos del año 2017, la producción de papa del Perú representó el 1,8% de la producción mundial y a la vez representó el 60% de la producción de Sudamérica. Si se sabe que la producción de papa de Sudamérica representó el $n\%$ de la producción mundial, determine el valor de n .



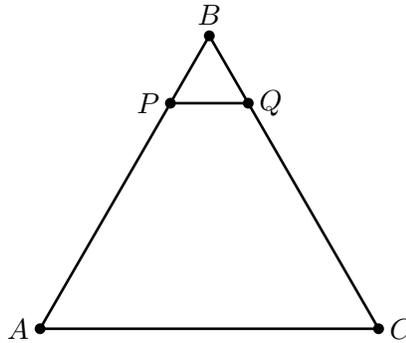
Segunda Fase - Nivel 2

3. La primera etapa de una olimpiada matemática consta de una prueba de 8 problemas. En la siguiente tabla, para cada k entre 0 y 8 (inclusive), se indica cuántos alumnos resolvieron exactamente k problemas. Por ejemplo, 6 alumnos resolvieron exactamente 1 problema y 22 alumnos resolvieron exactamente 4 problemas.

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|----|----|----|---|---|---|
| N° de alumnos que resolvieron k problemas | 5 | 6 | 8 | 10 | 22 | 13 | 7 | 5 | 2 |

Para determinar los alumnos que clasificarán a la siguiente etapa, se escoge un número natural n y se hace clasificar a todos los alumnos que resolvieron al menos n problemas. ¿Para qué valor de n se cumple que el número de alumnos clasificados está entre la tercera parte y la mitad del número total de alumnos?

4. En la figura mostrada, ABC es un triángulo equilátero de perímetro 90 cm. Además, los segmentos PQ y AC son paralelos. Calcule la suma de los perímetros de los polígonos PBQ y $APQC$ (en cm), si se sabe que estos números están en la relación de 3 a 14.



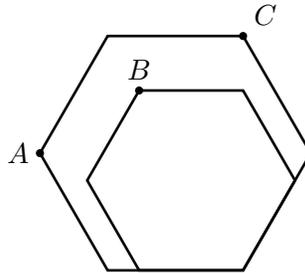
5. Sean a y b números reales tales que $8^a \cdot 3^b = 7^8$ y $2^a \cdot 9^b = 7^6$. Calcule el valor de 2^a .
6. Determine el menor número natural N que satisface todas las siguientes condiciones:
- Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 2.
 - Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 0.
 - Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 1.
 - Existen dos dígitos adyacentes de N cuyo producto es 8.

Aclaración: dos dígitos son adyacentes si se encuentran uno al lado de otro.



Segunda Fase - Nivel 2

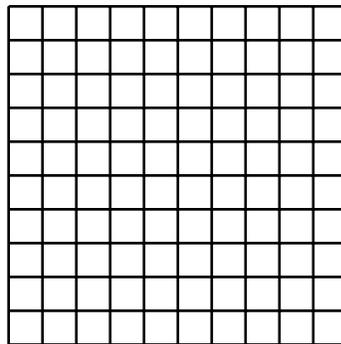
7. Se muestran dos hexágonos regulares, uno dentro del otro. Si los puntos A , B y C pertenecen a una misma recta y el perímetro del hexágono mayor es 120 cm, determine el perímetro del hexágono menor (en cm).



8. Se escogen al azar dos aristas distintas de un cubo. Se sabe que la probabilidad de que esas dos aristas tengan un extremo en común se puede expresar como $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos coprimos. Determine el valor de $a + b$.

Aclaración: Considere que todas las aristas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.

9. Cada casilla de un tablero de 10×10 se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cada subtablero de 3×3 tenga al menos una casilla de cada uno de los tres colores. ¿Cuántas casillas rojas puede haber como máximo?



10. Determine cuántos enteros positivos a cumplen que $a \leq 8575$ y además:

$$\text{mcd}(a, 8575) = \text{mcd}(a + 1, 8575) = 1.$$

Aclaración: $\text{mcd}(r, s)$ denota al máximo común divisor de los enteros positivos r y s .

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

Tercera Fase - Nivel 2

4 de octubre de 2018

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas (120 minutos) para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas y asegúrate de que hayas guardado tus respuestas en el sistema. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega, registrada en el sistema.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Una empresa produjo cierto número de unidades en enero del 2017 y cada mes a partir de febrero produjo 800 unidades menos que el mes anterior. Si durante los 7 últimos meses de dicho año la empresa produjo 4500 unidades en promedio, ¿cuántas unidades en promedio produjo la empresa durante los primeros 5 meses de ese mismo año?
2. Determine el mayor número de cuatro dígitos \overline{abcd} que es múltiplo de 12 y satisface la condición $a < b < c < d$.
3. Calcule el valor de:

$$\left(1 + \frac{3}{4}\right) \times \left(1 + \frac{3}{5}\right) \times \left(1 + \frac{3}{6}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{3}{57}\right).$$



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

9. Sea ω una semicircunferencia fija de diámetro $AB = 16$. Sea P un punto variable del diámetro AB y Q el punto sobre ω tal que QP es perpendicular a AB . Sea M el punto medio del segmento PQ . La recta que pasa por M y es perpendicular a PQ corta a los arcos AQ y QB en los puntos C y D , respectivamente (C y D están sobre ω). ¿Cuál es el mayor valor posible de la diferencia de las áreas de los cuadriláteros $PMDB$ y $PMCA$?
10. Sea t_1, t_2, t_3, \dots una sucesión **infinita** formada por enteros positivos tal que, para todo entero positivo k , los números t_1, t_2, \dots, t_k dejan restos distintos al ser divididos entre k . Determine el mayor valor posible de $|t_{20} - t_{18}|$.

Aclaración: Si n y q son enteros positivos, al dividir n entre q el resto puede ser uno de los números $0, 1, \dots, q - 1$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

Cuarta Fase - Nivel 2

11 de noviembre de 2018

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

1. Sea ABC un triángulo y sean D , E y F puntos de los lados BC , CA y AB , respectivamente, tales que DE es perpendicular a AC y $\angle BAC = 2\angle BFD$. Si $AE = EC + BD$ y $CD = DB + AF$, pruebe que el triángulo ABC es equilátero.

2. Se tiene un tablero de 5×5 que al inicio tiene escrito el número 0 en cada casilla. Hay dos operaciones disponibles:

- Escoger dos casillas que están en la misma fila y sumar 1 a los números de esas casillas.
- Escoger dos casillas que están en la misma columna y sumar 2 a los números de esas casillas.

Determine cuántas operaciones como mínimo son necesarias para conseguir que todos los números del tablero sean iguales y positivos.



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Cuarta Fase - Nivel 2

3. Sean a y b números reales que pertenecen al intervalo cerrado $[2, 3]$. Determine el mayor valor posible de la expresión

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a},$$

y encuentre todas las parejas (a, b) para las cuales se consigue ese mayor valor.

4. Determine el menor número entero $k \geq 3$ que tiene la siguiente propiedad: Si a, b, c, d, n son cualesquiera enteros positivos tales que $a + b + c + d$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ son múltiplos de n , entonces $a^k + b^k + c^k + d^k$ también es múltiplo de n .

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XVI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2019)

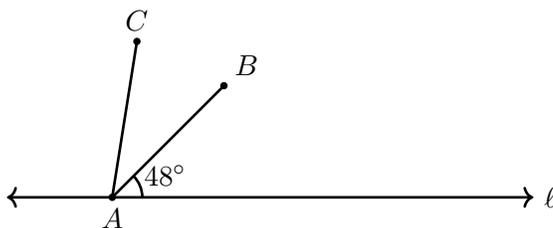
Primera Fase - Nivel 2

10 de julio de 2019

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - **Entrega tu hoja de respuestas y el cuadernillo de preguntas** tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Escribe tus datos (nombre, grado, etc) y la hora de entrega con lapicero. Te recomendamos que marques tus respuestas con lápiz.
 - **Importante: Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de esta prueba por ningún medio.**
-

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Ramiro y Sofía tienen juntos 24 juguetes. Determine cuál de las siguientes situaciones no puede ocurrir:
 - A) Ramiro y Sofía tienen la misma cantidad de juguetes.
 - B) Ramiro tiene el triple del número de juguetes que Sofía.
 - C) Ramiro tiene 9 juguetes más que Sofía.
 - D) Ramiro tiene 4 juguetes más que Sofía.
 - E) Ramiro tiene el doble del número de juguetes que Sofía.
2. Omar tiene 6 soles en monedas de 10 y 20 céntimos. Si él tiene la misma cantidad de monedas de 10 céntimos que de 20 céntimos, ¿cuántas monedas tiene en total?
 - A) 50
 - B) 24
 - C) 20
 - D) 36
 - E) 40
3. El segmento AB ha rotado 38° en sentido antihorario hasta ocupar la posición del segmento AC . Calcule la medida del ángulo agudo que forman las rectas BC y ℓ .



- A) 23°
- B) 24°
- C) 29°
- D) 27°
- E) 10°



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 2

4. El pelo de alpaca es un producto que el Perú exporta. En el siguiente cuadro se indica el porcentaje de kilos de pelo de alpaca que el Perú exportó el año 2018, dividido por países:

| País | Porcentaje |
|--------------|------------|
| China | 43 % |
| Italia | 39 % |
| Inglaterra | 6 % |
| Japón | 5 % |
| Australia | 4 % |
| Otros países | 3 % |

Con respecto a la cantidad de kilos de pelo de alpaca que cada país recibió por parte del Perú, indique la alternativa falsa:

- A) China recibió más de la tercera parte del total.
B) China recibió menos que Italia y Japón juntos.
C) Corea del Sur recibió menos del 4 % del total.
D) Japón y Australia recibieron más de la décima parte del total.
E) China recibió menos de la mitad del total.
5. Una fábrica produce tubos de metal de forma cilíndrica. El precio de venta de un tubo es proporcional a la superficie lateral del cilindro correspondiente. Si un tubo de metal de 6 cm de diámetro y 1,2 m de largo cuesta 24 soles, ¿cuánto cuesta un tubo de metal de 8 cm de diámetro y 1,5 m de largo?
- A) 40 soles B) 36 soles C) 42 soles D) 50 soles E) 48 soles
6. Rodrigo fue a la tienda y compró 3 bolsas de azúcar y 5 tarros de leche. Llegando a casa se dio cuenta que se había confundido, así que regresó a la tienda, devolvió todo lo que había comprado y pidió que le den 5 bolsas de azúcar y 3 tarros de leche. Debido a este error, le tuvieron que devolver 1 sol y 20 céntimos. Con esta información podemos deducir que:
- A) Un tarro de leche cuesta 50 céntimos más que una bolsa de azúcar.
B) Un tarro de leche cuesta 60 céntimos más que una bolsa de azúcar.
C) Un tarro de leche cuesta 40 céntimos más que una bolsa de azúcar.
D) Un tarro de leche cuesta 50 céntimos menos que una bolsa de azúcar.
E) Un tarro de leche cuesta 60 céntimos menos que una bolsa de azúcar.



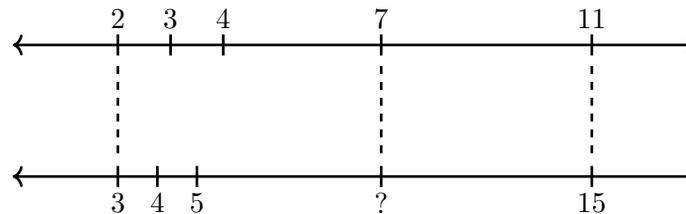
Primera Fase - Nivel 2

7. Se hizo un estudio del número de habitantes por casa que hay un centro poblado, los resultados fueron los siguientes:

| N° de hab. por casa | Frecuencia |
|---------------------|------------|
| 1 | 7 |
| 2 | 8 |
| 3 | 12 |
| 4 | 15 |
| 5 | 19 |
| 6 | 26 |
| 7 | 6 |

Por ejemplo, este cuadro nos dice que 19 casas tienen 5 habitantes. ¿Cuál es la mediana del número de habitantes por casa?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
8. Se muestran dos rectas numéricas que tienen diferentes escalas y han sido dispuestas en paralelo. Determine qué fracción corresponde al punto marcado con un signo de interrogación.



- A) $\frac{29}{3}$ B) $\frac{31}{3}$ C) $\frac{49}{5}$ D) $\frac{19}{2}$ E) $\frac{20}{3}$
9. Se lanzó al aire un objeto y su altura (expresada en metros) viene dada por la fórmula $49t - 4,9t^2 + 15$, donde t es la cantidad de segundos que el objeto lleva en el aire. En cierto momento el objeto está por primera vez a una altura de 117,9 metros, ¿dentro de cuántos segundos el objeto volverá a estar a la misma altura?
- A) 7 B) 2,5 C) 4 D) 5 E) 3,5
10. En un colegio, cada alumno de primaria recibió como regalo 2 cuadernos, 3 lápices y 1 borrador; y cada alumno de secundaria recibió 3 cuadernos, 4 lápices y 2 borradores. Si la cantidad de lápices más la cantidad de borradores recibidos es 320, ¿cuántos cuadernos recibieron en total?
- A) 180 B) 160 C) 175 D) 144 E) 140



PERÚ

Ministerio de Educación



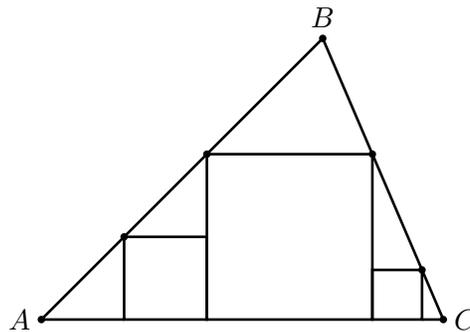
Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 2

11. Tres ecuatorianos y cuatro peruanos están trabajando en un proyecto de investigación. Sus edades ordenadas de menor a mayor son: 21, 22, 25, 26, 27, 28, 30. Si el promedio de edad de los peruanos es mayor en 4,5 años que el promedio de edad de los ecuatorianos. ¿Cuántos años tiene el peruano de menor edad?

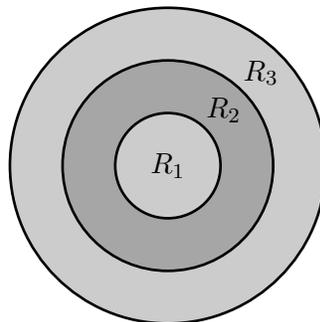
- A) 21 B) 22 C) 25 D) 26 E) 27

12. Los cuadrados mostrados tienen áreas 4 cm^2 , 16 cm^2 y 1 cm^2 (de izquierda a derecha). Calcule el área del triángulo ABC .



- A) $\frac{175}{6} \text{ cm}^2$ B) $\frac{98}{3} \text{ cm}^2$ C) $\frac{364}{6} \text{ cm}^2$ D) $\frac{112}{3} \text{ cm}^2$ E) $\frac{35}{2} \text{ cm}^2$

13. Un juego consiste en lanzar dardos al siguiente tablero que consta de tres circunferencias concéntricas de radios 10 cm, 20 cm y 30 cm.



Como se observa, las circunferencias determinan tres regiones R_1 , R_2 y R_3 (R_1 es un círculo y las otras dos regiones son anillos circulares). Al lanzar un dardo, la probabilidad de que caiga fuera del tablero es 0,1 y las probabilidades de que caiga en cada una de las regiones R_1 , R_2 , R_3 son proporcionales a las áreas de estas regiones. ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo caiga en la región R_2 ?

- A) 0,15 B) 0,25 C) 0,257 D) 0,3 E) 0,2



PERÚ

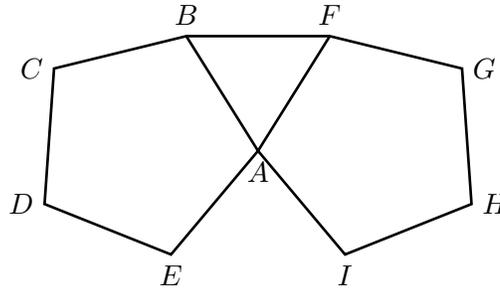
Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 2

14. En la figura mostrada $ABCDE$ y $AFGHI$ son pentágonos regulares y ABF es un triángulo equilátero. Halle la medida del ángulo $\angle FCH$.

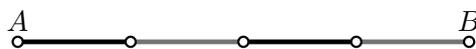


- A) 22° B) 24° C) 20° D) 25° E) 27°
15. Alejandro escogió cuatro números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y Samuel se quedó con los otros tres números. Luego, Alejandro multiplicó sus cuatro números y Samuel multiplicó sus tres números. Se sabe que al sumar el resultado de Alejandro con el resultado de Samuel se obtiene un número primo, calcule la suma de los dígitos de dicho número primo.
- A) 19 B) 8 C) 10 D) 17 E) 22
16. Sean a, b, c y d números reales no nulos. Determine como máximo cuántos números negativos puede haber entre los siguientes ocho números reales:

$$a, b, c, d, ab, bc, cd, da.$$

Aclaración: ab es el producto de los números a y b . Análogamente, bc, cd y da también denotan productos.

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
17. La carretera que une las ciudades A y B consta de cuatro tramos. Debido a diversos motivos un tramo puede estar bloqueado. Si escogemos cualquier tramo, la probabilidad de que esté bloqueado es $\frac{1}{10}$.



Indique a qué intervalo pertenece la probabilidad de que sea posible ir de A a B , es decir, la probabilidad de que ningún tramo esté bloqueado.

- A) $[\frac{12}{20}, \frac{13}{20})$ B) $[\frac{13}{20}, \frac{14}{20})$ C) $[\frac{14}{20}, \frac{15}{20})$ D) $[\frac{15}{20}, \frac{16}{20})$ E) $[\frac{16}{20}, \frac{17}{20})$



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

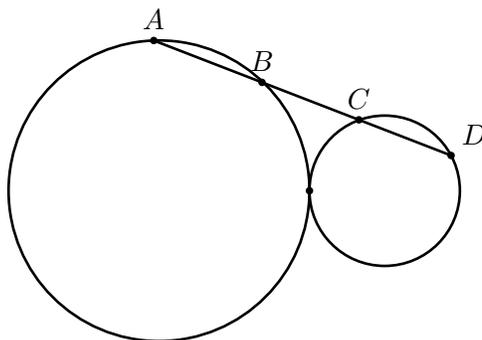
Primera Fase - Nivel 2

18. Determine el menor número capicúa que es múltiplo de 32 y dé como respuesta la suma de sus dígitos.

Aclaración: Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 11, 606 y 3773 son números capicúas.

- A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 6

19. Las circunferencias mostradas son tangentes y sus radios son 4 y 2. Si $AB = BC = CD$, calcule AD .



- A) $6\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{7}$ C) $\sqrt{69}$ D) $6\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

20. Supongamos que el mínimo valor posible de la expresión $\left| \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} - 3 \right|$, donde a y b son dígitos no nulos, es q . Si q se puede expresar como $\frac{m}{n}$ donde m y n son enteros positivos coprimos, calcule el valor de $m + n$.

- A) 21 B) 4 C) 19 D) 34 E) 15

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XVI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2019)

Segunda Fase - Nivel 2

21 de agosto de 2019

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas y verifica que se ponga la hora en la que estás entregando. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- **No puedes llevar estas hojas que contienen los enunciados.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Un kg de papaya cuesta 2 soles más que un kg de sandía. Ana compró una papaya de 1,5 kg y una sandía de 2,5 kg, por lo que pagó 13 soles. ¿Cuántos soles costaría una sandía de 4 kg?
2. Se tiene 70 números enteros consecutivos. Si la mediana del conjunto formado por los 27 números mayores es 123, calcule la mediana del conjunto formado por todos los otros números.
3. Se van a repartir 18000 botellas de gaseosa entre cierta cantidad de supermercados, de forma equitativa. Resultó que dos supermercados no pudieron recibir el pedido por falta de espacio, así que se tuvo que repartir las 18000 botellas entre los otros supermercados, también de forma equitativa. De esta forma cada supermercado recibió 100 botellas más de lo que estaba previsto inicialmente, ¿cuántas botellas iba a recibir cada supermercado inicialmente?



PERÚ

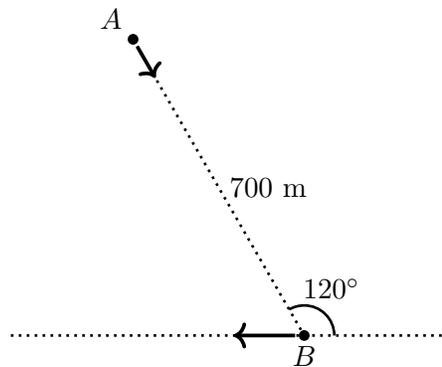
Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

- Se tiene 7 números enteros positivos que forman una progresión aritmética de razón r , de tal forma que cada uno consta de dos dígitos. Los dos primeros números empiezan con 4 y los dos últimos empiezan con 8. Determine el valor de r .
- En el lado AC de un triángulo ABC se ubica el punto D tal que $\angle ABD = 60^\circ$ y $\angle DBC = 30^\circ$. Si $AD = 11$, $DC = 5$ y $AB = \frac{n}{7}$, calcule el valor de n .
- Los enteros positivos a y b cumplen que el mínimo común múltiplo de $(10 + a)$ y $(28 + b)$ es igual al mínimo común múltiplo de 10 y 28. Determine el menor valor posible de $a + b$.
- Dos puntos A y B se están moviendo en un plano, con velocidades de 2 m/s y 4 m/s, respectivamente. En cierto instante la distancia entre ellos es 700 m y las direcciones son las mostradas a continuación:



Si los puntos mantienen su velocidad (incluyendo su dirección), determine después de cuántos segundos a partir del instante mostrado la distancia entre los puntos será la menor posible.

- Isaías tiene 3 monedas de 1 sol, 4 monedas de 2 soles y 5 monedas de 50 céntimos en el bolsillo derecho. En el bolsillo izquierdo tiene 2 monedas de 1 sol, 3 monedas de 50 céntimos y n monedas de 20 céntimos. Si Isaías saca al azar una moneda de cada bolsillo, la probabilidad de que sean de distinto valor es exactamente $\frac{7}{8}$, calcule el valor de n .

Aclaración: Considere que en cada bolsillo todas las monedas tienen igual probabilidad de ser sacadas.



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

9. Sea n un entero positivo que tiene exactamente 6 divisores positivos, los cuales son:

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 = n.$$

Si $d_5 - d_4 = 10$, determine la suma de todos los posibles valores de n .

10. Regina tiene 75 varillas de metal cuyas longitudes son 1 cm, 2 cm, 3 cm, ..., 74 cm y 75 cm. Ella escogió k de esas varillas de tal manera que se puede construir un triángulo con cualesquiera tres varillas escogidas, determine el mayor valor de k para el cual esta situación es posible.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XVI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2019)

Tercera Fase - Nivel 2

26 de setiembre de 2019

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas (120 minutos) para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas y asegúrate de que hayas guardado tus respuestas en el sistema. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega, registrada en el sistema.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Hugo y Sandro salieron a la misma hora, cada uno con su automóvil, desde Trujillo con dirección a Chiclayo. Los primeros 30 minutos la rapidez de Hugo fue 56 km/h, luego, decidió bajar su rapidez a 32 km/h. Después de 15 minutos de reducir su rapidez, Hugo fue alcanzado por Sandro. Si desde el inicio la rapidez de Sandro fue v km/h. Calcule el valor de v .
2. Para cada entero positivo k , sea $P(k)$ la siguiente proposición: “Si la suma de los dígitos de un entero positivo de tres dígitos es k , entonces al menos dos de sus dígitos son iguales”. De las veintisiete proposiciones $P(1), P(2), \dots, P(27)$, ¿cuántas son verdaderas?
3. Definimos las funciones $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = 128x^6$. Si r es un número real positivo tal que

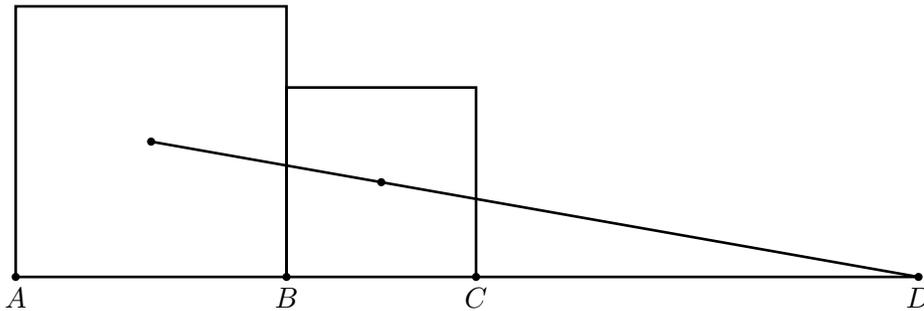
$$f(f(f(r))) = g(g(r)),$$

calcule el valor de $128r$.



Tercera Fase - Nivel 2

4. Determine cuántos enteros positivos n , con $n \leq 1000$, cumplen que $n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 9999.
5. En la figura se muestra dos cuadrados y una recta que pasa por sus centros. Si $AB = 8$ y $CD = 18$, calcule la longitud de BC .



6. Sea $N = 2^5 \times 5^7 \times 7^9$. Determine cuántos enteros positivos d cumplen que $d + \frac{N}{d}$ es un número entero impar.
7. Determine la cantidad de números de dos dígitos \overline{ab} , con $a \neq b$, para los cuales se cumple que \overline{aabb} es múltiplo de \overline{ab} .
8. Sea ω una circunferencia de radio 20 y P un punto cuya distancia al centro de ω es 18. Determine cuántas cuerdas de ω pasan por P y tienen longitud entera.
Aclaración: Una cuerda es un segmento que une dos puntos de una circunferencia.
9. Roxana tiene cinco tarjetas de colores distintos en una bolsa. Cada uno de los días lunes, martes y miércoles ella realizó el siguiente procedimiento: extrajo al azar tres tarjetas y las devolvió a la bolsa. Si la probabilidad de que cada tarjeta haya sido extraída al menos una vez (considerando los tres días) es $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos coprimos, calcule el valor de $m + n$.
10. Un conjunto finito \mathcal{A} de números reales es llamado *interesante* si para cualquier elemento $x \in \mathcal{A}$ se verifica la condición $x(x-1) \in \mathcal{A}$. Sea \mathcal{U} la unión de todos los conjuntos interesantes que tienen exactamente 12 elementos. Determine cuántos elementos tiene el conjunto \mathcal{U} .

XVI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2019)

Cuarta Fase - Nivel 2

27 de octubre de 2019

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
 - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
 - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
-

1. Sea $ABCDEF$ un hexágono regular, C_1 la circunferencia de diámetro AF y C_2 la circunferencia de centro E y radio EF . Las circunferencias C_1 y C_2 se intersectan en los puntos F y P y, además, AP interseca a ED en Q . Determine en qué relación están las longitudes de los segmentos DQ y QE .
2. Alejandro tiene 60 caramelos y los divide en cuatro grupos de al menos un caramelo cada uno. Luego, Carlos elige uno de los grupos. Después, de los tres grupos que quedan, Alejandro elige dos. Finalmente, Carlos se queda con el grupo restante. Determine cuántos caramelos, como máximo, Alejandro puede asegurar obtener.
3. Para cada entero positivo n , encuentre todas las soluciones reales del siguiente sistema:

$$2x^n = y(x^2 + 1),$$

$$2y^n = z(y^2 + 1),$$

$$2z^n = x(z^2 + 1).$$



PERÚ

Ministerio
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA

Fundada el 29 de Marzo de 1957

Cuarta Fase - Nivel 2

4. Se escogen 5000 números del conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10000\}$ tales que entre los números escogidos no hay uno que divida a otro. Determine el menor valor que puede tomar uno de los números escogidos.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XVII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

Segunda Fase - Nivel 2

15 de setiembre de 2021

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas por correo electrónico. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Un chocolate cuesta 2 soles y un paquete de 6 chocolates cuesta 11 soles. Si Pedro compró 50 chocolates y gastó exactamente 93 soles, ¿cuántos paquetes de 6 chocolates compró?
2. En un partido de fútbol profesional se enfrentaron Loreto F.C. y Amazonas F.C. En el primer tiempo, Loreto F.C. tuvo el 44% de posesión del balón. En el segundo tiempo, Amazonas F.C. tuvo el 58% de posesión del balón. Si en todo el partido Loreto F.C. tuvo el $n\%$ de posesión del balón, calcule el valor de n .

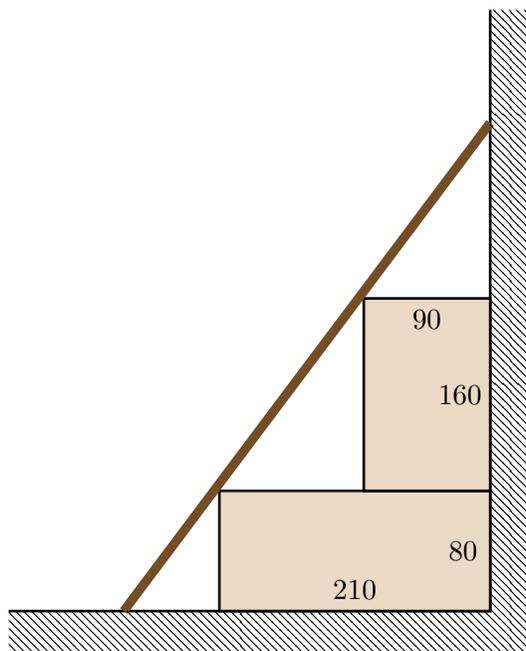
Aclaración: Considere que los dos tiempos tuvieron igual duración.

3. El índice de masa corporal (IMC) es un indicador del estado físico de una persona, su valor viene dado por la siguiente fórmula:

$$\text{IMC} = \frac{m}{h^2},$$

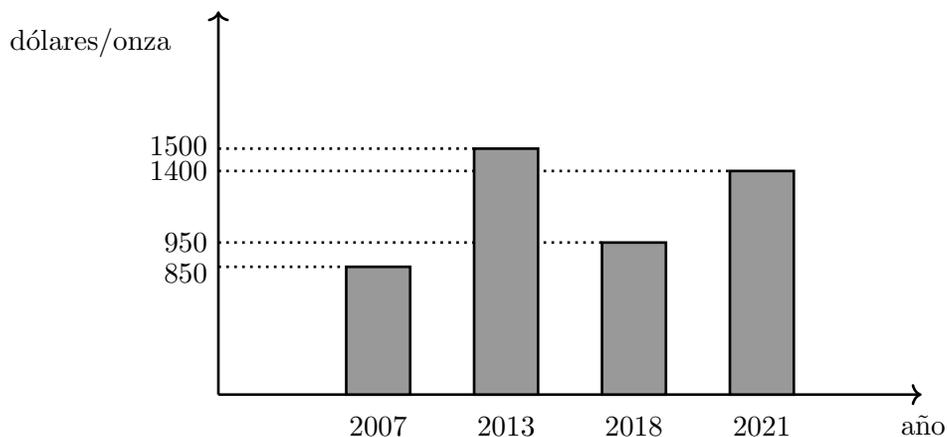
donde m es la masa de la persona, en kilogramos, y h es la altura de la persona en metros. Armando y Gerardo son dos hermanos, tales que la altura de Gerardo es $1/5$ menos que la altura de Armando y la masa de Gerardo es $2/5$ menos que la masa de Armando. Calcule el IMC de Gerardo si el IMC de Armando es 25,6.

4. Una caja de madera de 80 cm de alto y 210 cm de largo se colocó junto a una pared. Sobre esa caja y junto a la pared, se colocó otra caja que tiene 160 cm de alto y 90 cm de largo. Luego, se colocó una escalera que está apoyada en el piso, la pared y las dos cajas, como se muestra en la figura. Calcule la longitud de la escalera, en cm.



5. En un colegio todos los estudiantes tienen entre 11 y 15 años, inclusive, y el promedio de sus edades es igual a 13. Todos los estudiantes se encontraban formando en el patio y al retirarse todos los estudiantes de 11 años, el promedio de las edades de los estudiantes restantes subió a 14, seguidamente se retiraron los estudiantes que tenían 15 años y el promedio volvió a ser 13. Finalmente, se retiraron los 50 estudiantes que quedaron. Encuentre la cantidad de estudiantes que hay en el colegio.

6. El siguiente diagrama de barras muestra el precio de la onza de oro en dólares según cada año. En el año 2007 Alex se prestó 6000 dólares del banco con el compromiso de devolver 12000 dólares en el 2021 y decidió comprar 7 onzas de oro en ese momento. En el año 2013 vendió todo su oro, en el año 2018 decidió comprar 11 onzas de oro y finalmente en el 2021 vuelve a vender todo su oro para pagar su deuda al banco. Determine cuántos dólares ganó Alex realizando dicha operación.



7. Sea ABC un triángulo tal que $\angle ABC = 90^\circ$. Sea M el punto medio del lado AC y sea D un punto de BM tal que $AD = BC$. Si $\angle BAD = 10^\circ$ y $\angle ABD = n^\circ$, calcule el valor de n .
8. Veinte estudiantes van a formar 10 grupos de 2 para una exposición, para eso se realiza un sorteo en el que se va a determinar los grupos. El sorteo se realiza de la siguiente forma: se escribe en 20 papeles los nombres de los estudiantes, se introducen a una urna y luego se van sacando los papeles uno por uno hasta terminar, luego, los dos primeros forman el primer grupo, los dos siguientes forman el segundo grupo y así sucesivamente. Suponga que dos estudiantes son Camila y Dante, y que la probabilidad de que ellos estén en el mismo grupo es $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos coprimos. Calcule $a + b$.
9. En una compañía hay 82 accionistas. Se cumple que cualesquiera 54 accionistas tienen al menos 50% de las acciones de la compañía. Sabemos que bajo estas condiciones, un accionista en particular puede tener como máximo $n\%$ de las acciones de la compañía, determine el valor de n .
10. María tiene 50 tarjetas colocadas en una mesa donde cada una tiene escrito el número 1 o -1 . Carla puede señalar 3 tarjetas cualesquiera y preguntar a María el producto de los números escritos en ellas. ¿Cuántas preguntas como mínimo necesita Carla hacer para que pueda conocer con seguridad el producto de los 50 números escritos en las tarjetas?



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

Tercera Fase - Nivel 2

12 de octubre de 2021

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NUMERO ENTERO POSITIVO.

1. En una empresa hay 30 trabajadores, algunos de los cuales trabajan en la modalidad remota (desde casa) y otros en la modalidad presencial. Si se contrata a 15 trabajadores: 10 en la modalidad remota y 5 en la modalidad presencial, el porcentaje de la modalidad remota se duplicaría. Determine cuántos trabajadores en la modalidad remota hay actualmente.
2. En un hotel la numeración de sus habitaciones corresponde a un número de tres dígitos, donde el dígito de las centenas representa el piso en el que se encuentra una habitación. José se registró en dicho hotel y se dio cuenta de que el número de su habitación es múltiplo de 9, múltiplo de 5 y par. Si se sabe que los números de las habitaciones en cada piso terminan en 01, 02, ..., 30, determine cuál es el piso más alto en el que se puede encontrar la habitación de José.

Aclaración: Note que no hay habitaciones que terminan en 00.

3. Abel le pide a Beto que piense en un número. Luego le pide que realice las siguientes operaciones en orden: multiplica el número por 2, suma X , divide entre 4, resta 2, vuelve a multiplicar por 2 y finalmente resta el número que pensaste inicialmente. Luego de estas operaciones, Abel le dice a Beto que el resultado fue 12. Determine el valor de X para que Abel acierte con el resultado de la operación.
4. En una prueba de atletismo la pista tiene una longitud de d metros y cada uno de los participantes corrió a rapidez constante. Se sabe que Ana le ganó a Beto por 90 metros, es decir, cuando Ana llegó a la meta, a Beto le faltaba 90 metros. Además, Beto le ganó a Carlos por 75 metros y Ana le ganó a Carlos por 150 metros. Encuentre el valor de d .
5. Aldo y Matías tienen cada uno, un dado. Ambos lanzan sus dados y la persona que saca el número más alto gana. Si sacan el mismo número vuelven a lanzar otra vez y si el resultado vuelve a ser empate se declara a Matías como ganador. La probabilidad de que Matías gane es $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos coprimos. Calcule el valor de $a + b$.
Aclaración: Cada dado tiene los números del 1 al 6.
6. Los enteros positivos $a < b < c < d < e$ forman una progresión aritmética y tres de ellos están en progresión geométrica. Calcule la cantidad de valores que puede tomar d , si sabemos que es menor que 120.
7. Sea $ABCD$ un cuadrado. Sean E un punto de la prolongación de BC (C está entre B y E) y F un punto de la prolongación de DC (C está entre D y F) tales que $\angle AEF = 90^\circ$. Si $BE = 24$ y $DF = 26$, determine el área del cuadrado $ABCD$.
8. Un profesor pide a sus alumnos que resuelvan la ecuación $x^2 - ax + b + 1 = 0$, que tiene raíces enteras positivas $x_1 < x_2$. Juan se equivoca al copiar el problema y en su lugar resuelve la ecuación $x^2 - ax + b - 1 = 0$, que tiene raíces enteras positivas $x_3 < x_4$. Si $x_1x_4 = 5040$, determine el valor de x_2x_3 .
9. Un terreno tiene forma de un tablero de 9×9 . En cada casilla está enterrado un cofre y solo uno de los cofres tiene un tesoro. Cada uno de los cofres tiene un pañuelo azul si el tesoro está en la misma fila o columna en la que está dicho cofre, en caso contrario tiene un pañuelo rojo. ¿Cuántas casillas debemos escarbar como mínimo para desenterrar con certeza el tesoro?
10. Sea $N = 2^{10} \times 3^5$. Determine cuántos elementos como máximo puede tener un conjunto A que cumple las siguientes propiedades a la vez:
 - (a) los elementos de A son enteros positivos menores o iguales que N .
 - (b) si a y b son elementos distintos de A , entonces N es un divisor de ab (producto de a y b).



PERÚ

Ministerio
de Educación



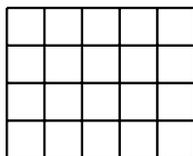
SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

XVII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

Cuarta Fase - Nivel 2

28 de octubre de 2021

1. En un tablero de 4×5 , como el que se muestra en la figura, se colocan los números del 1 al 20 (un número en cada casilla), en algún orden. Luego, se suman los números de cada una de las 5 columnas. Si A es la mayor suma y B es la menor suma, determine el menor valor posible de $A + B$.



2. Sea ABC un triángulo, la bisectriz del ángulo $\angle CAB$ interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en D . La recta paralela a AC que pasa por D interseca al lado AB en L y al lado BC en K . Sea M el punto medio de AC . Si $MK = ML$, demuestre que $BL = KD$.
3. Encuentre todos los polinomios $P(x)$ de coeficientes reales tales que

$$P(x + y) + P(xy) = P(x) + P(y) + P(xy + 1),$$

para todos los números reales x y y .

4. Un entero positivo es llamado *alternante* si tiene un dígito 0, en caso tenga más de un dígito, se cumple que sus dígitos alternan entre par e impar. Por ejemplo, 3, 12, 585, 5074 y 23890 son alternantes. Demuestre que todo número entero mayor que 2 se puede expresar como la suma de exactamente tres números alternantes (no necesariamente distintos).



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2022)

Etapa UGEL - Nivel 2

26 de agosto de 2022

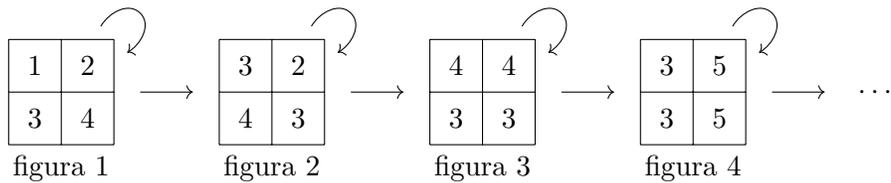
Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

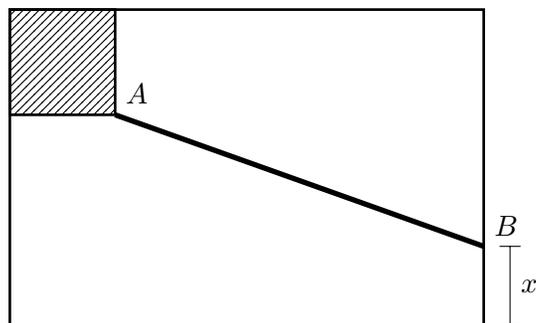
ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En una ciudad hay dos empresas de taxi. La primera empresa cobra una cantidad fija de 5 soles más 1 sol por cada kilómetro. La segunda empresa cobra una cantidad fija de 10 soles más 50 céntimos por cada kilómetro recorrido. Resulta que para ir de mi casa a la municipalidad las dos empresas me cobran lo mismo. ¿A cuántos kilómetros está mi casa de la municipalidad?
2. Mi amigo y yo vivimos en la misma calle y en la misma cuadra. La casa de mi amigo desde la esquina derecha es la 5^a casa y desde la esquina izquierda es la 11^a casa. Si mi casa está en el medio de la cuadra, ¿cuántas otras casas hay entre mi casa y la casa de mi amigo?

3. Al inicio tenemos un tablero de 2×2 que tiene los números del 1 al 4 como se muestra en la figura 1. En cada paso se suma 1 a los dos números que están en la primera fila y se rota el tablero 90° en sentido horario. De esta forma se obtienen las figuras 2, 3, 4, etc. Encuentre el mayor número en la figura 100.

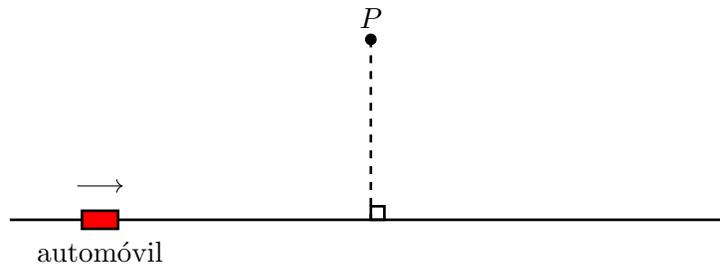


4. En el curso de estadística de un Instituto Superior dejaron cinco actividades de tal manera que la calificación de cada actividad podía ser 0, 1, 2, 3 o 4. La nota del curso es la suma de las cinco calificaciones. Si Sandra obtuvo 11 en el curso, determine cuántos valores puede tomar la mediana de sus cinco calificaciones.
5. Carlos tiene algunas monedas de 2 y 5 soles en su bolsillo. Usando algunas de sus monedas y sin recibir vuelto, él puede comprar de dos formas distintas un objeto de 17 soles, de una sola forma un objeto de 19 soles y no puede comprar un objeto de 24 soles. Encuentre la cantidad de monedas que tiene Carlos.
6. Rafael posee un terreno rectangular de 63 metros de ancho y 75 metros de largo, y construyó su casa sobre un cuadrado de 15 metros de lado ubicado en una esquina de su terreno. Él quiere dividir el resto del terreno usando una cerca AB de tal forma que las dos partes restantes de su terreno tengan igual área. Encuentre la distancia x , en metros, para que esto ocurra.



7. En un salón de clase, algunos de los estudiantes pertenecen al club de matemática. Si escogemos al azar un hombre del salón, la probabilidad de que pertenezca al club de matemática es $\frac{1}{4}$. Si escogemos al azar una mujer del salón, la probabilidad de que pertenezca al club de matemática es $\frac{3}{7}$. Si escogemos al azar a un integrante del club, la probabilidad de que sea mujer es $\frac{3}{5}$. Determine cuántos hombres hay en el salón si este número es 2 más que el número de mujeres.

8. Un automóvil está recorriendo una autopista rectilínea a rapidez constante. A un lado de la autopista, en el punto P , hay un puesto de control policial. En cierto momento el automóvil estaba a 300 metros de distancia de P , 11 segundos después estaba a 250 metros de P y después de 25 segundos adicionales el automóvil volvió a estar a 300 metros de P . Determine a qué distancia está el puesto policial de la autopista.



9. En la pizarra están escritos 26 enteros positivos tales que al multiplicar cualesquiera 5 de ellos se obtiene un múltiplo de 30. Determine como mínimo cuántos de ellos son múltiplos de 30.
10. En el juego de batalla naval tenemos escondido un submarino de 6×1 o 1×6 en un tablero de 11×11 . Un disparo consiste en lanzar un proyectil a una casilla del tablero. El submarino es destruido si recibe al menos un disparo en una de sus casillas. Encuentra la mínima cantidad de disparos que se necesitan para estar seguros de destruir el submarino.



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2022)

Etapa DRE - Nivel 2

28 de septiembre de 2022

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Ana, Bruno y Cecilia son tres amigos que están jugando con dos dados. Ana lanzó los dados y obtuvo dos números cuya suma es 5. Luego, Bruno lanzó los dados y obtuvo dos números cuya suma es 10. Finalmente, Cecilia lanzó los dados y se dio cuenta que los seis números obtenidos hasta ese momento son distintos. Calcule la suma del mayor número que obtuvo Ana, el mayor número que obtuvo Bruno y el mayor número que obtuvo Cecilia.

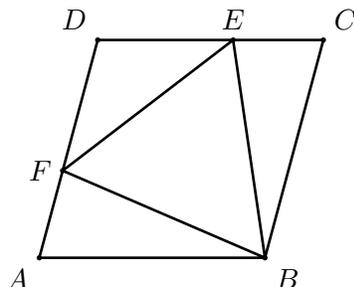
Aclaración: Cada dado tiene en sus caras los números del 1 al 6.

2. Pepe tiene en su tienda manzanas, naranjas y peras. La cantidad de naranjas es menor que el doble de la cantidad de manzanas y la cantidad de peras es mayor que el triple de la cantidad de manzanas. Si hay 55 frutas entre manzanas y naranjas, ¿cuál es la menor cantidad de peras que puede haber en la tienda de Pepe?

3. Sean a , b y c enteros positivos tales que $\text{mcd}(a, b) = 6$, $\text{mcd}(a, c) = 4$, $\text{mcm}(a, b) = 36$ y $\text{mcm}(a, c) = 60$. Encuentre el valor de $a + b + c$.

Aclaración: Si p y q son enteros positivos, $\text{mcd}(p, q)$ denota al máximo común divisor de p y q . Además, $\text{mcm}(p, q)$ denota al mínimo común múltiplo de p y q .

4. En la figura mostrada, $ABCD$ es un rombo y BEF es un triángulo equilátero de tal modo que $AB = BF$. Calcule el valor de x , si $\angle DAB = x^\circ$.



Aclaración: Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales.

5. Humberto y su hijo Raúl cumplen años el mismo día. En su próximo cumpleaños, que será en el año 2023, ocurrirá una propiedad interesante: la edad de Humberto será igual a la suma de los dígitos del año en que nació Humberto y la edad de Raúl será igual a la suma de los dígitos del año en que nació Raúl. Calcule la suma de las edades que tendrán Humberto y su hijo en su próximo cumpleaños.
6. Sean a , b y c números reales, entre los cuales no hay dos iguales, tales que

$$(a + b)(a + c) = b,$$

$$(b + c)(b + a) = c,$$

$$(c + a)(c + b) = a.$$

Encuentre el valor de $64abc$.

7. Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en A . Ubicamos dos puntos P y Q sobre la hipotenusa BC de tal modo que $BP = PQ = QC$. Si $AP = 58$ y $AQ = 59$, encuentre la longitud de la hipotenusa BC .
8. Hugo tiene 18 tarjetas de 6 colores distintos en una caja, 3 de cada color. Él debe elegir al azar 3 tarjetas de la caja. Si la probabilidad de que dichas tarjetas sean de colores distintos es $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos coprimos, calcule el valor de $a + b$.

9. Encuentre la cantidad de parejas de números enteros (x, y) , con $1 < x < y$, tales que el siguiente número es entero:

$$\frac{x}{y} + \frac{2}{x} - \frac{1}{xy}.$$

10. En 1000 tarjetas están distribuidos los números del 0 al 999, un número en cada tarjeta. Se escoge una de esas tarjetas (que no es 0 ni 1) y se coloca en el centro de una circunferencia, mientras que las otras se colocan alrededor de la circunferencia de tal manera que la suma de cualesquiera k números consecutivos en la circunferencia sea divisible por el número colocado en el centro. Determine para cuántos valores de k esta situación es posible, donde $2 \leq k \leq 999$.



PERÚ

Ministerio
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2022)

Etapa Nacional - Nivel 2

26 de octubre de 2022

1. Halle todas las parejas (a, b) de números enteros tales que el número $(a + 1)(b + 1)(a + b)$ es primo.
2. Sea AB un diámetro de una circunferencia Γ cuyo centro es O . El rectángulo $OBCD$ es trazado de tal manera que el segmento CD interseca a Γ en el punto E . La prolongación de AD interseca a Γ en el punto F . Si $DE = BC$ y G es el punto de intersección de los segmentos BF y CD , demuestre que $\angle GOE = \angle COE$.
3. Encuentre todos los números reales positivos a para los cuales la siguiente proposición es verdadera: Si x y y son números reales, no necesariamente distintos, que pertenecen al intervalo $[0, a]$, entonces $x + y - xy$ pertenece al intervalo $[0, a]$.
4. Sea n un entero positivo. Se tiene n puntos rojos alrededor de una circunferencia enumerados del 1 al n en el sentido horario. Sea ℓ una recta horizontal que no interseca a la circunferencia y se encuentra por debajo de ella. Al proyectar los n puntos rojos sobre la recta ℓ se obtienen n puntos distintos y a cada una de dichas proyecciones le asignamos el mismo número del punto rojo del que proviene. De este modo, al leer los números de ℓ de izquierda a derecha, obtenemos una permutación de los números del 1 al n . Determine la cantidad de permutaciones diferentes que se pueden obtener.

Aclaración: Los n puntos rojos no necesariamente están igualmente espaciados.



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2023)

Etapa UGEL - Nivel 2

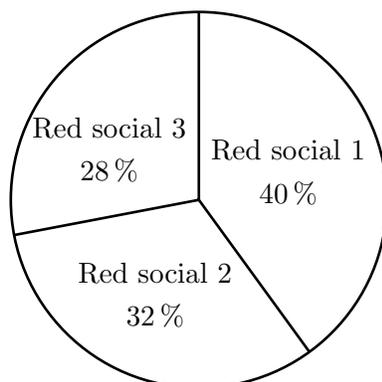
22 de setiembre de 2023

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En el siguiente diagrama se muestra la preferencia de un grupo de personas respecto a tres redes sociales



Si la cantidad de personas que prefieren la red social 2 es 6 más que la cantidad de personas que prefieren la red social 3. Determine la cantidad de personas que prefieren la red social 1.

2. Arturo, Víctor y Sandra son tres hermanos cuyas edades son 11, 13 y 16, respectivamente. Cada uno recibió 105 soles y gastó cierta cantidad de dinero, proporcional a su edad. Si la cantidad de dinero que tiene ahora Arturo es el doble de lo que tiene Sandra, ¿cuántos soles tiene Víctor?
3. En una universidad solo hay carreras de ciencia o ingeniería. Uno de cada dos estudiantes que estudian ciencia es mujer y tres de cada diez estudiantes que estudian ingeniería son mujeres. Sabemos que la cantidad de hombres es a la cantidad de mujeres como 11 es a 7. Si la cantidad total de estudiantes es 1800, determine la cantidad de mujeres que estudian ciencia.
4. El profesor le dictó un número de tres dígitos a sus alumnos. Mario se olvidó de escribir el dígito de las unidades y obtuvo un número de dos dígitos que es $\frac{2}{21}$ del número correcto. Rodolfo se olvidó de escribir el dígito de las decenas y obtuvo un número de dos dígitos que es $\frac{3}{28}$ del número correcto. Encuentre el número que dictó el profesor.
5. Un juego consiste en 12 cajas con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 limones, respectivamente. Cada vez que Gladys coloca una moneda en el juego, los limones de dos cajas se juntan en una sola caja y se aumenta un limón a esta unión. Gladys recibe un premio si todas las cajas llegan a tener la misma cantidad de limones. Determine la menor cantidad de monedas que debe gastar Gladys para poder obtener un premio.
6. Sea $ABCD$ un rectángulo de área 80. Sean M y N puntos de los lados CD y AD , respectivamente tales que las áreas de los triángulos ABN y BCM son 30 y 20, respectivamente. Halle el área del triángulo BMN .
7. En un grupo de 10 niños cada uno escogió un entero positivo y lo escribió en una tarjeta. A cada uno de los 10 niños se le hizo la pregunta: “¿Cuál es la suma de los otros 9 números?” Los nueve primeros niños respondieron 122, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 130, 131 y el décimo niño respondió un número que ya había dicho uno de los niños anteriores, ¿cuál fue la respuesta del décimo niño?
8. Los números del 1 al 9 son distribuidos aleatoriamente en las casillas de un tablero de 3×3 (uno por casilla). Sean a , b y c los números de tres dígitos formados por los números de la primera, segunda y tercera fila, respectivamente, léidos de izquierda a derecha. Por ejemplo en

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 9 |
| 5 | 4 | 6 |
| 7 | 8 | 3 |

tenemos que $a = 129$, $b = 546$ y $c = 783$. Sea p la probabilidad de que $a > b > c$. Determine el valor de $120p$.

9. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $AB = 24$, $AD = 20$, $BC = CD$, $\angle BAD = 30^\circ$ y $\angle BCD = 90^\circ$. Determine el valor de AC^2 .
10. Encuentre la cantidad de enteros positivos n , menores que 110, que tienen exactamente 8 divisores positivos y, además, la suma de ellos es igual a $2n + 12$.



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2023)

Etapa DRE - Nivel 2

9 de noviembre de 2023

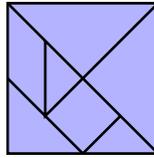
Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

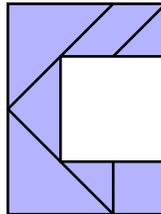
ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En una feria artesanal en Cusco el precio de un tejido es proporcional a su área. Kimberly compró un tejido de 2 metros de largo y 1,5 metros de ancho a 80 soles y Hugo compró un tejido de la misma calidad que el de Kimberly, pero de 1,5 metros de largo y 1,2 metros de ancho. ¿Cuánto costó el tejido de Hugo?
2. Los números del 1 al 8 están escritos en ocho tarjetas de papel. Ana, Beatriz, Carla y Daniela eligen 2 tarjetas cada una de tal forma que las sumas de los dos números en sus tarjetas son iguales a 4, 7, 11 y 14, respectivamente. ¿Cuál es el mayor número que eligió Carla?
3. Miguel tiene 60 caramelos y los distribuye en algunas bolsas de tal forma que no hay dos bolsas con la misma cantidad de caramelos y, además, ninguna bolsa queda vacía. ¿Cuántas bolsas como máximo tiene Miguel?

4. Martín tiene una hoja cuadrada de área 8 y la divide en siete piezas de Tangram, como se muestra en la siguiente figura:



Usando estas siete piezas él forma una nueva figura en forma de letra C:



Calcule el perímetro de esta nueva figura.

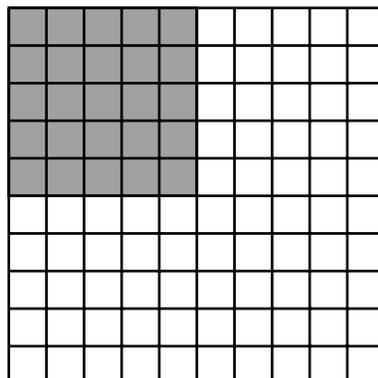
Observación: Las piezas de Tangram son 5 triángulos rectángulos isósceles, un paralelogramo y un cuadrado.

5. Decimos que un número natural es *asombroso* si es múltiplo de la suma de sus dígitos y también es múltiplo de la suma de los cuadrados de sus dígitos. Por ejemplo, 2023 es asombroso pues es múltiplo de $7 = 2+0+2+3$ y también es múltiplo de $17 = 2^2+0^2+2^2+3^2$. Encuentre el mayor número asombroso de cuatro dígitos que es múltiplo de 23.
6. Sea ABC un triángulo. Ubicamos un punto E sobre el segmento AC y punto D sobre el segmento BE de tal forma que $BD = 8$, $BC = 9$ y

$$\angle ABC = \angle BCA = \angle CDE = \angle DEC.$$

Calcule la longitud de AB .

7. En algunas casillas del tablero de 10×10 mostrado se va a colocar una moneda, de tal manera que cada fila, cada columna y cada una de las dos diagonales del tablero contenga exactamente una moneda. Determine cuántas monedas puede haber como máximo en las casillas sombreadas.



8. Determine el menor entero positivo n para el cual existen enteros positivos x_1, x_2, \dots, x_n , no necesariamente distintos, tales que

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = 2023.$$

9. Cuatro amigos van a una heladería que tiene helados de 3 sabores distintos. Cada uno pide cierta cantidad de helados (que puede ser 0) de tal manera que:

- Si alguien pide dos o más helados estos deben ser de sabores distintos.
- Ninguno de los sabores fue elegido por exactamente dos amigos.
- Cada sabor fue pedido por al menos un amigo.

Determine la cantidad de formas en las que pudieron realizar su pedido.

10. Sean a, b, c, d números reales tales que

$$\begin{aligned}a^3 + c^3 &= \frac{13}{4}, \\a^2b + c^2d &= \frac{19}{24}, \\ab^2 + cd^2 &= \frac{11}{72}, \\b^3 + d^3 &= \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Calcule el valor de $\frac{6(a+c)}{b+d}$.



PERÚ

Ministerio
de EducaciónSOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

XIX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2023)

Etapa Nacional - Nivel 2

22 de noviembre de 2023

1. Algunos profesores y 107 estudiantes fueron a una caminata. Por motivos de seguridad, todos los participantes se dividieron en grupos de exactamente 7 personas, de tal manera que en cada grupo haya por lo menos un profesor. Determine como mínimo cuántos profesores pudieron haber participado en la caminata.
2.
 - a) Sean a y b números reales tales que $a^2 + ab + b^2 = 3$, determine el mayor valor posible de b .
 - b) Sean a , b y c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc = 1$, determine el mayor valor posible de b .
3. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 120^\circ$ y $AB > AC$. Sea P un punto en el plano tal que $AP = AB$ y AP es perpendicular a AC (suponga que el segmento PA interseca al segmento BC). Sea S el punto donde la recta perpendicular a CP que pasa por P , corta a la recta AC . Sea T un punto en el segmento AB tal que $TB = CA$ y, finalmente, sea L el punto donde la recta CT corta al segmento BS . Demuestre que los puntos A , T , L y S pertenecen a una misma circunferencia.
4. Un profesor piensa en un número entero $N > 1$ y le pide a Raúl que encuentre dicho número. Para ayudar a Raúl, el profesor escribe algunas pistas en la pizarra. Las pistas pueden ser de dos tipos:
 - El profesor elige un entero positivo a y escribe en la pizarra: “ N es divisor de a ”.
 - El profesor elige un entero positivo b y escribe en la pizarra: “ N no es divisor de b ”.

Por ejemplo, si el profesor piensa en $N = 2$, entonces el profesor puede escribir en la pizarra las siguientes tres pistas: “ N es divisor de 4”, “ N es divisor de 6” y “ N no es divisor de 5”. Con estas tres pistas Raúl puede decir con seguridad que el profesor pensó en el número $N = 2$.

Para cada $N > 1$, determine la menor cantidad de pistas que debe escribir el profesor para que Raúl consiga determinar con seguridad el valor de N .

XX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2024)

Etapa I.E. - Nivel 2

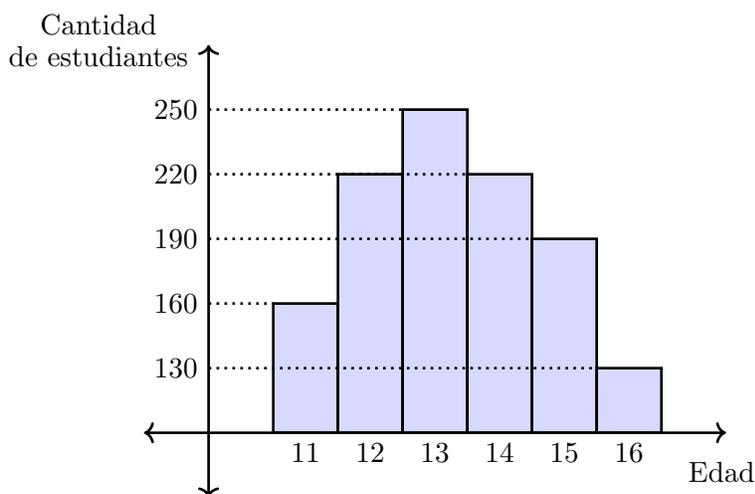
27 de junio de 2024

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. El siguiente diagrama muestra las edades (en años) de los estudiantes de secundaria de un colegio de 1170 alumnos. Por ejemplo, hay 220 estudiantes de 12 años.



¿Cuántos estudiantes tienen 14 años o más?

- A) 510 B) 520 C) 530 D) 540 E) 550



PERÚ

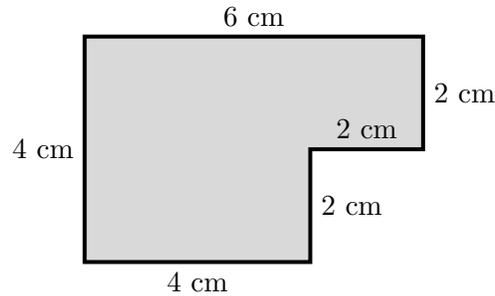
Ministerio de Educación



SOCIEDAD MATEMATICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

Etapa I.E. - Nivel 2

2. En la siguiente figura se muestra el plano de una casa con una escala de 1:250, esto quiere decir que 1 cm en el plano corresponde a 250 cm en la vida real. ¿Cuál es el área real de la casa?



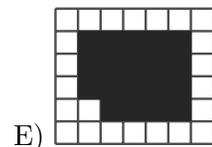
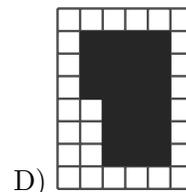
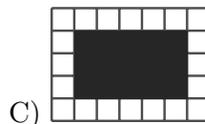
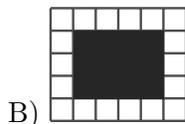
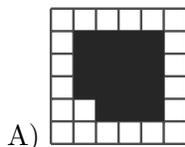
Aclaración: considere que todas las esquinas de la casa son ángulos rectos.

- A) 120 m² B) 125 m² C) 135 m² D) 150 m² E) 180 m²
3. En la siguiente tabla se muestra los resultados de una encuesta sobre el color favorito de un grupo de personas

| | |
|----------|---------|
| Rojo | n |
| Azul | $n + 1$ |
| Amarillo | 10 |
| Verde | 15 |
| Otro | $n - 2$ |

Si el color que se repite más veces fue elegido 20 veces, determine el valor de n .

- A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22
4. En un restaurante hay dos opciones para la propina: pagar $\frac{1}{8}$ del total de la cuenta más 5 soles o pagar $\frac{1}{10}$ del total de la cuenta más 10 soles. Al momento de pagar la cuenta, Pedro se da cuenta de que la propina es la misma en ambas opciones. ¿Cuál fue el monto de la cuenta de Pedro, sin contar la propina?
- A) 100 soles B) 120 soles C) 150 soles D) 160 soles E) 200 soles
5. Raúl tiene dos rectángulos idénticos hechos con papel negro. Las dimensiones de cada rectángulo son 3 cm y 4 cm. Estos rectángulos se colocan sobre un papel cuadriculado, donde los cuadraditos tienen 1 cm de lado. ¿Cuál de las siguientes figuras no se puede obtener?





PERÚ

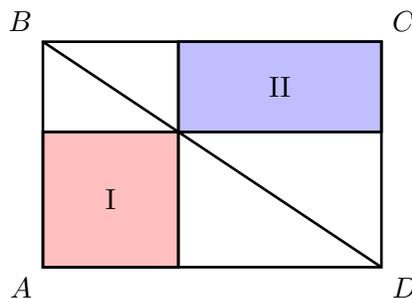
Ministerio de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

Etapa I.E. - Nivel 2

6. El día de hoy Fernanda tiene 5 clases de igual duración y un descanso de 10 minutos entre clases consecutivas (en total tiene 4 descansos). Si la segunda clase termina a las 9:20 a.m. y la quinta clase comienza a la 11:10 a.m. ¿A qué hora comienza la primera clase?
- A) 7:30 a.m. B) 7:40 a.m. C) 7:50 a.m. D) 8:00 a.m. E) 8:10 a.m.
7. Una familia compra cada mes un balón de gas licuado a 50 soles. El programa Bonogas les ofrece financiar la mitad del costo de la instalación de gas natural y la otra mitad deberán pagarla en su recibo mensual durante 10 años. Si la instalación cuesta 1200 soles y el consumo de gas natural que realizan mensualmente es de 30 soles, determine cuál será el ahorro mensual que tendrán al acceder al programa durante los primeros meses, con respecto a lo que gastan normalmente.
- A) 5 soles B) 8 soles C) 10 soles D) 15 soles E) 20 soles
8. En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo, donde I es un cuadrado cuya área es 36 cm^2 y II es un rectángulo cuyo perímetro es 30 cm. Determine el área del rectángulo $ABCD$.



- A) 144 cm^2 B) 150 cm^2 C) 162 cm^2 D) 180 cm^2 E) 216 cm^2
9. En un aula la profesora repartió caramelos a los alumnos de tal modo que cada niña recibió a caramelos y cada niño recibió b caramelos. Resulta que cualesquiera 5 niños tienen más caramelos que cualesquiera 4 niñas, sin embargo, cualesquiera 6 niños tienen menos caramelos que cualesquiera 5 niñas. Determine el menor valor posible de $a + b$.
- A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20
10. Sean A , B y C tres números de dos dígitos cada uno, de tal forma que los seis dígitos usados son diferentes entre sí. Determine el producto de los dígitos del mayor valor que puede tomar el máximo común divisor de A , B y C .
- A) 14 B) 8 C) 15 D) 12 E) 16



PERÚ

Ministerio
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

XX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2024)

Etapa UGEL - Nivel 2

13 de agosto de 2024

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. En una avenida hay 100 árboles plantados. Por fiestas patrias, cada árbol se pinta de rojo o de blanco de tal modo que el primer y el último árbol son rojos. Además, entre cada dos árboles rojos consecutivos hay exactamente dos árboles blancos. ¿Cuántos árboles rojos hay en total?
2. Un repartidor tiene que recorrer 2 km en 10 minutos. La primera mitad del recorrido la hace a una rapidez constante de x km/h. Luego, se da cuenta de que para llegar a la hora establecida la siguiente mitad del recorrido la tiene que hacer a $2x$ km/h. Determine el valor de x .
3. En la siguiente igualdad:

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{eee},$$

a, b, c, d, e son dígitos no nulos, no necesariamente distintos. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $\overline{ab} + \overline{cd}$?



PERÚ

Ministerio
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

Etapa UGEL - Nivel 2

4. Evelyn escribe todos los números enteros del 1 al n en la pizarra:

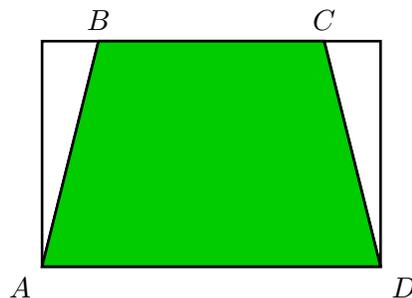
$$1, 2, 3, \dots, n.$$

Luego, se da cuenta de que la cantidad de números que son múltiplos de 99 es igual a la cantidad de números que son múltiplos de 100. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar n ?

5. Sean a y b números reales positivos. Determine el menor valor que puede tomar la siguiente expresión:

$$\frac{a^2 + 3b^2 + 12}{a + b}$$

6. En un aula de una universidad hay 12 estudiantes. En el último examen la nota de los 12 estudiantes fueron 11 enteros positivos consecutivos, donde la nota de dos de los estudiantes era la misma. Si el promedio de las notas en dicho examen fue de 15,25, ¿cuál es la nota repetida?
7. En una plaza rectangular, el área verde tiene forma de cuadrilátero $ABCD$ donde $AB = BC = CD$.



Este cuadrilátero es curioso ya que AB , AD y AC son enteros positivos que forman una progresión aritmética de razón 2 en ese orden. Determine la longitud de AB .



PERÚ

Ministerio
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

Etapa UGEL - Nivel 2

8. En el siguiente tablero de 3 filas y 100 columnas escribimos algunos números de la siguiente manera. En la primera fila están las 100 primeras potencias cuartas. En la segunda fila están todas las potencias cuartas desde el 7^4 hasta el 106^4 . Finalmente, en cada casilla de la tercera fila escribimos la diferencia positiva de los dos números ubicados inmediatamente arriba de él. Determine el máximo común divisor de todos los números que aparecen en la tercera fila.

| | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|--------------|---------|-----------------|
| 1^4 | 2^4 | 3^4 | 4^4 | \dots | 100^4 |
| 7^4 | 8^4 | 9^4 | 10^4 | \dots | 106^4 |
| $7^4 - 1^4$ | $8^4 - 2^4$ | $9^4 - 3^4$ | $10^4 - 4^4$ | \dots | $106^4 - 100^4$ |

9. Harald lanza un dado n veces y gana 1 punto cada vez que obtiene un 6. Resulta que la probabilidad de obtener exactamente 1 punto es igual a la probabilidad de obtener exactamente 2 puntos. ¿Cuál es el valor de n ?
10. Cada casilla de un tablero de 5×7 está pintada de rojo o azul, de tal modo que cada casilla (roja o azul) tiene al menos 2 casillas vecinas azules. ¿Cuántas casillas azules puede haber en el tablero como mínimo?

Aclaración: dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.



PERÚ

Ministerio
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA

Fundada el 29 de Marzo de 1957

XX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2024)

Etapa DRE - Nivel 2

12 de setiembre de 2024

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

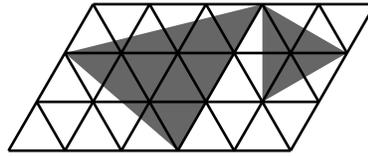
ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Lucía lavó su chalina por primera vez y redujo su longitud en 20%. Luego de lavarla por segunda vez, su longitud se redujo en 10%. Ahora su chalina mide 90 cm. ¿Cuántos cm medía la chalina al inicio?
2. Kevin debe ir en auto a una reunión en otra ciudad. Si viaja a una rapidez de 60 km/h llegará a las 2:00 p.m., una hora antes de la reunión. Si viaja a una rapidez de 40 km/h llegará a las 4:00 p.m. con una hora de retraso. Encuentre la rapidez, en km/h, a la que debe ir Kevin para llegar a tiempo.
3. Determine cuántos enteros positivos N cumplen que $\frac{N}{20}$ es un entero positivo de cuatro dígitos y $\frac{N}{24}$ es un entero positivo de tres dígitos.



Etapa DRE - Nivel 2

- Sean los números $a = 101 \times 97$, $b = 103 \times 107$, $c = 101 \times 107$ y $d = 97 \times 103$. Encuentre el mayor divisor impar de $a + b + c + d$.
- Si el área de cada triángulo equilátero pequeño es igual a $1 u^2$, calcule la diferencia entre las áreas de los triángulos sombreados.



- En el siguiente arreglo

| | |
|---------|-----------|
| fila 1: | 1 |
| fila 2: | 2 4 |
| fila 3: | 3 6 9 |
| fila 4: | 4 8 12 16 |
| ⋮ | ⋮ |

se cumple que, para todo entero positivo n , en la fila n están los n primeros múltiplos positivos de n . Encuentre el menor k para el cual el número 2024 está en la fila k .

- Estrella tiene muchas monedas de 2 y 5 soles. Ella quiere comprarse un par de zapatillas que cuestan N soles y para realizar el pago puede hacerlo exactamente de 6 formas distintas. Encuentre el mayor valor posible de N .
- Pablo pinta tres aristas distintas de un cubo de manera aleatoria. Sea p la probabilidad de que cualesquiera dos de las aristas pintadas no tengan un punto en común. Determine el valor de $480p$.
- Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que las longitudes de sus lados son $AB = 4$, $BC = 8$, $CD = 6$ y $DA = 3$. Si $\angle DAB + \angle BCD = 120^\circ$ y k es el producto de las longitudes de los segmentos BD y AC , calcule el valor de k^2 .
- Sean a y b números reales tales que $a^3 - b^3 = 5a + 5b$. Determine el mayor valor posible de $18(a - b)^4$.

XX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2024)
Etapa Nacional - Nivel 2

23 de octubre de 2024

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones
- Cada problema tiene un valor **máximo de 25 puntos**.

Problema 1.- José toma un taxi a su trabajo y siempre paga una cantidad que puede ser 20, 21, 22, 23, 24 o 25 soles. Un día, decide llevar únicamente monedas de 2 y 5 soles en su bolsillo. ¿Cuántas monedas como mínimo debe llevar para asegurarse de que pueda pagar exactamente cualquiera de estas cantidades?

Problema 2.- Se tiene cinco dígitos distintos entre sí. El menor número natural de cinco dígitos que se puede formar con estos dígitos, sin repetir ninguno, es múltiplo de 11, mientras que el mayor número natural que se puede formar con los mismos dígitos no es múltiplo de 11. Determine el mayor valor posible de la suma de estos cinco dígitos.

Aclaración: Tenga en cuenta que un número natural no puede empezar con el dígito 0.

Problema 3.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < \frac{1}{3}, \\ 3x - 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x, \end{cases}$$

Encuentre todos los números reales x que satisfacen la ecuación $f(f(f(f(x)))) = x$.

Problema 4.- Sea ABC un triángulo, en los lados AC y AB se ubican los puntos Y y Z , respectivamente, tales que $AY + AZ = BC$. Suponga que existe un punto X dentro del triángulo AYZ , tal que $2\angle AZX = \angle ACB$ y $2\angle AYX = \angle ABC$. Pruebe que la longitud de AX es mayor o igual que la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC



PERÚ

Ministerio
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

Etapa Nacional - Nivel 2

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

Reconstruido por Math Academy Perú

**OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE
MATEMÁTICAS**

**EXÁMENES RECOPIRADOS
DESDE 2004 HASTA 2024**

ONEM NIVEL 2

**ETAPAS ILEE-UGEL-DRE-
NACIONAL**



ONEM

**ACEROS
AREQUIPA**

ENTRENAMIENTO INTENSIVO

*OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE
MATEMÁTICAS*



Clases en vivo para
estudiantes de 1° a 5°
de secundaria



Entrenadores especialistas
en olimpiadas



Simulacros semanales
nivel olimpiadas

ETAPAS • UGEL • DRE • NACIONAL



**+ DE S/150,000
EN PREMIOS**

➔ **Escríbenos al +51 916841376**
 **www.mathAcademyperu.com**