PROBLEMAS SELECTOS DE ENTRENAMIENTO PARIDAD DE NÚMEROS

Problemas selectos para concursos y Olimpiadas de Matemáticas

MATERIAL GRATUITO

Math Academy

¡Entrena con los mejores!

GERMÁN A. VERGARA RETTES

www.mathacademyperu.com

PARIDAD

“Todo número natural es par o impar"

Propiedades

- La suma de dos números pares es par.
- En general la suma de varios números pares es par.
- La suma de dos números impares es par.
- La suma de una cantidad par de números impares es par.
- En general la suma de una cantidad impar de números impares es impar.
- La suma de un par y un impar es impar.
- El producto de varios enteros es impar si y solo si todos sus factores son impares.
- El producto de varios enteros es par si y solo si al menos uno de sus factores es par.

Observación 1

Se dice que dos números tienen la misma paridad si ambos son pares o ambos son impares.

Observación 2

La suma de varios enteros y la cantidad de impares que hay en dicha suma tienen la misma paridad.

PROBLEMA 1

Ana arrancó 25 hojas de un libro de 200 páginas y sumó los 50 números de las páginas de dichas hojas. ¿Puede ser el resultado de dicha suma igual a 2024?

PROBLEMA 2

¿Es posible hacer una lista con los números enteros del 1 al 9 de manera que quede una cantidad impar de números entre el 1 y el 2, entre el 2 y el 3,…, y entre el 8 y el 9?

PROBLEMA 3

Demostrar que la suma y diferencia de dos enteros tienen la misma paridad.

PROBLEMA 4

Demostrar que la suma de varios enteros y la cantidad de impares que hay en dicha suma tienen la misma paridad.

PROBLEMA 5

¿Existe alguna solución entera para la ecuación $a^2 \cdot b^3 \cdot (11a - 3b) = 385875$?

PROBLEMA 6

Siendo a y b números enteros positivos, indica cuántas soluciones existen en la siguiente ecuación:

$$a^2 - b^2 = 20242026$$

PROBLEMA 7

Siendo a y b números enteros positivos, indica cuántas soluciones existen en la siguiente ecuación:

$$a^2 - b^2 = 12$$

PROBLEMA 8

Siendo a y b números enteros positivos, indica cuántas soluciones existen en la siguiente ecuación:

$$a^2 - b^2 = 35$$

PROBLEMA 9

Siendo a, b y c números enteros positivos que cumplen:

$$(7a + b + c)(7a + b - c) = 40$$

Calcula el valor de $a \times b \times c$.

PROBLEMA 10

Un gusano se desplaza verticalmente sobre un árbol. Cada día puede solamente subir o bajar. Si el primer día recorre 1 cm, y el segundo 2 cm, y así sucesivamente, ¿Será posible que después de 2026 días el gusano se encuentre en el lugar de donde partió?

PROBLEMA 11

Germán invitó a H amigos y M amigas a una fiesta. Todos se sentaron en una mesa redonda y entonces cada muchacho le da un regalo a cada muchacha que se encuentra a su lado (si sólo se tiene una muchacha a su lado solo da un regalo, y si se encuentra entre dos muchachos no da ninguno). Prueba que el número total de regalos repartidos es par.

PROBLEMA 12

El conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se colorea de rojo y negro y de manera que 1 y n quedan de diferente color. Muestre que el número parejas de enteros consecutivos con diferente color es impar.

PROBLEMA 13

El producto de 2026 enteros es igual a 1. Muestre que la suma de estos números no puede ser cero.

PROBLEMA 14

Prueba que la ecuación:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1,$$

no tiene soluciones en los números naturales.

PROBLEMA 15

Un polígono convexo de 11 lados tiene un eje de simetría, muestre que el eje pasa por uno de los vértices.

PROBLEMA 16

Un polígono con un número par de lados se circunscribe a una circunferencia. Los lados se colorean alternadamente de rojo y negro. ¿Es la suma de las longitudes de los lados rojos igual a la suma de las longitudes de lados negros?

PROBLEMA 17

En una urna se colocan 2001 canicas marcadas con los números $1, 2, \dots, 2001$. Se sacan al azar 2 canicas de la urna, y se calcula la suma de los números en ellas. ¿Qué es más probable que la suma sea par o que sea impar?

PROBLEMA 18

En un tablero de 25×25 se colocan 25 monedas de manera que las posiciones son simétricas con respecto a una de las diagonales. Muestre que alguna moneda esta sobre tal diagonal. Si las posiciones son simétricas con respecto a las diagonales, una de las monedas está en el centro del tablero.

PROBLEMA 19

En un tablero de ajedrez un caballo parte de una casilla y regresa a esa casilla después de varios saltos (de caballo). Muestre que el caballo realizó un número par de movimientos.

PROBLEMA 20

¿Puede un caballo en un tablero de ajedrez partir de la esquina inferior izquierda y llegar a la esquina superior derecha, visitando cada una de las casillas del tablero una y solamente una vez?

PROBLEMA 21

¿Es posible colocar números enteros positivos en las casillas de un tablero 9×2024 para que la suma de los números de cada fila y la suma de los números de cada columna sean todas números primos?

PROBLEMA 22

Una máquina da cinco llaves rojas cuando alguien inserta una llave azul y da cinco llaves azules cuando alguien inserta una llave roja. Pedro tiene solo una llave azul y quiere obtener la misma cantidad de llaves azules y rojo usando esta máquina. ¿Y es posible hacer esto?

PROBLEMA 23

En el pizarrón se tienen escrito once números 1. Se permite tomar dos números y sumarle uno a ambos, restarle uno a ambos, o sumarle uno a uno y restarle uno al otro. ¿Es posible mediante estas operaciones tener escrito en el pizarrón once números 10?

PROBLEMA 24

Demuestra que un entero positivo tiene una cantidad impar de divisores positivos, si y solo si es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 25

Se tiene una fila de focos numerados del 1 al 2024. Inicialmente se encuentran todos apagados. Se realiza el siguiente proceso: primero se cambia el estado del foco con el número 1 así como el de todos sus múltiplos. A continuación, se le cambia el estado al foco 2 y el de todos sus múltiplos. Luego el del 3 y todos sus múltiplos, y así sucesivamente hasta que se llega al foco 2024 y se le cambia a este su estado. ¿Cuántos focos terminan prendidos al final del proceso?

PROBLEMA 26

Demuestre que si m y n son enteros tales que:

$$n + n^2 + n^3 = 2 + 3m + m^2,$$

entonces n es par.

PROBLEMA 27

La suma de las inversas de 4046 números enteros y positivos es 2024. Demostrar que al menos uno de ellos es par.

PROBLEMA 28

Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

PROBLEMA 29

Sean: a_1; a_2; ...; a_n una permutación arbitraria de los números 1; 2; ...; n; donde n es impar. Demuestre que el siguiente producto es par:

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$$

PROBLEMA 30

Miguelito escribe los números enteros del 1 al 1000 en la pizarra de tal manera que la suma de cada tres números en posiciones consecutivas sea impar. ¿Cuál es la mayor cantidad de sumas impares que puede obtener Miguelito?